



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Cell Df
Rapports de Recherche

N° 799

**QUELQUES ASPECTS
MATHÉMATIQUES DE LA
PROPAGATION DES
FLAMMES PREMELANGÉES**

**Henri BERESTYCKI
Bernard LARROUTUROU**

FEVRIER 1988

**QUELQUES ASPECTS MATHÉMATIQUES
DE LA PROPAGATION
DES FLAMMES PREMELANGÉES (*)**

H. BERESTYCKI ^(1,2) et B. LARROUTUROU ⁽²⁾

(1) Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Paris-Nord,
C. S. P., 93430 Villetaneuse, FRANCE.

(2) INRIA, Sophia-Antipolis, 06560 VALBONNE, FRANCE.

(*) Etude partiellement supportée par la D.R.E.T. (Direction des Recherches, Etudes
et Techniques; contrat 84-209).

QUELQUES ASPECTS MATHÉMATIQUES
DE LA PROPAGATION
DES FLAMMES PREMELANGÉES

RESUME: Nous présentons une revue des résultats mathématiques existants concernant plusieurs modèles couramment utilisés pour décrire la propagation d'une flamme prémélangée dans un tube infini ouvert, ainsi que des méthodes mathématiques utilisées pour étudier ces modèles.

SOME MATHEMATICAL ASPECTS
OF PREMIXED FLAME PROPAGATION

ABSTRACT: We present a review of existing mathematical results concerning several models commonly used to describe the propagation of a premixed flame in an infinite open tube, as well as of the mathematical methods used to investigate these models.

A paraître dans:

To appear in:

Nonlinear partial differential equations and their applications,
Collège de France seminar,
H. Brezis & J. L. Lions editors,
Research Notes in Mathematics,
Pitman-Longman, London.

1. INTRODUCTION

Comme on le sait, les problèmes de combustion présentent un très grand intérêt scientifique et industriel. Ils ont fait l'objet ces dernières années de très nombreuses études physiques, numériques ou mathématiques. Les phénomènes de combustion en phase gazeuse sont décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui incluent, par rapport aux équations de Navier-Stokes, des équations supplémentaires pour les variables de composition (voir Buckmaster-Ludford [15], Williams [49]). A cause de la complexité de ces systèmes, plusieurs modèles simplifiés sont utilisés par les physiciens pour étudier certains aspects du modèle complet (voir Clavin [16], Sivashinsky [43], [44]).

Nous présentons dans cet article un panorama des résultats mathématiques existants concernant plusieurs modèles couramment utilisés pour décrire la propagation d'une flamme dans un mélange gazeux, ainsi que des méthodes mathématiques utilisées pour étudier ces modèles. La plupart des résultats présentés concernent des solutions stationnaires de problèmes de réaction-diffusion non linéaires sur \mathbb{R} ou dans un domaine cylindrique infini multidimensionnel.

Nous rappelons d'abord brièvement dans la section 2 comment les modèles mathématiques décrivant l'écoulement d'un mélange gazeux réactif sont obtenus à partir des théories physiques de base; nous présentons ensuite dans la section 3 les principaux systèmes approchés utilisés pour décrire la propagation d'une flamme, le modèle isobare et le modèle thermo-diffusif. L'étude mathématique du modèle isobare dans un cadre monodimensionnel est abordée dans la section 4, où l'on s'intéresse successivement à l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire, au comportement asymptotique de cette solution dans la limite (fréquemment utilisée par les physiciens) des grandes énergies d'activation, et également à l'existence et l'unicité d'une solution instationnaire. La section 5 est consacrée à l'étude dans un cadre multidimensionnel d'une équation de réaction-diffusion non linéaire issue du modèle thermo-diffusif.

Comme on le verra, les problèmes ouverts ou incomplètement résolus abondent dans ce domaine; nous avons regroupé dans la section 6 quelques remarques concernant ces questions ouvertes et l'ensemble des résultats présentés dans l'article.

Le lecteur intéressé pourra trouver les démonstrations détaillées des résultats présentés dans les travaux de H. Berestycki, B. Nicolaenko et B. Scheurer [10], B.

Larrouturou [33], H. Berestycki et B. Larrouturou [7], H. Berestycki et L. Nirenberg [11], [12], et H. Berestycki, B. Larrouturou et P.L. Lions [8].

2. MODELISATION DE LA COMBUSTION EN PHASE GAZEUSE

Dans cette partie, nous donnons une idée des principales étapes du cheminement qui conduit aux systèmes d'équations aux dérivées partielles modélisant un écoulement gazeux réactif. Nous présenterons ensuite dans la section 3 les principales approximations de ces systèmes qui sont utilisées de façon classique pour décrire des phénomènes de propagation de flamme.

Le problème est de décrire l'écoulement d'un *mélange compressible* de *plusieurs espèces gazeuses* susceptibles de donner lieu à des *réactions chimiques*, en prenant en compte les effets de transport, *diffusion des espèces* et *conduction thermique*. En toute rigueur, pour obtenir un modèle incluant l'ensemble de ces aspects, il faut se placer dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, en partant des équations de Liouville ou de Boltzmann (voir Hirschfelder et al [26], Williams [49]). Cependant, on aboutit au même modèle dans le cadre plus simple de la mécanique des milieux continus, au prix de quelques hypothèses simplificatrices. C'est de cette deuxième approche que nous donnons maintenant un aperçu.

2.1 Considérons un mélange gazeux de N espèces A_k , $1 \leq k \leq N$ (nous réserverons l'indice k pour désigner les espèces gazeuses). Les développements qui suivent reposent sur l'hypothèse suivante: on suppose l'existence de N "milieux continus" (ou "continua"), correspondant aux N espèces en présence. On a donc en chaque point \vec{x} , à chaque instant t , N masses volumiques $\rho_k(\vec{x}, t)$, N vitesses $\vec{v}_k(\vec{x}, t)$, N pressions partielles $p_k(\vec{x}, t)$; on suppose que ces variables sont continues et même continûment différentiables par rapport aux coordonnées d'espace et de temps. On définit aussi la masse volumique ρ du mélange par la relation $\rho(\vec{x}, t) = \sum_k \rho_k(\vec{x}, t)$, la "vitesse du mélange" \vec{v} par $\rho \vec{v} = \sum_k \rho_k \vec{v}_k$, et la pression totale par $p = \sum_k p_k$ (loi de Dalton). Enfin on suppose que l'on a en tout point équilibre thermique local entre les différentes espèces, c'est-à-dire que la température est la même pour toutes les espèces: $T_k(\vec{x}, t) = T(\vec{x}, t)$.

Ces notations étant posées, la démarche consiste à écrire les équations de la mécanique des fluides pour chacune des espèces, puis à en déduire des équations pour le mélange. Par exemple, l'équation de conservation de la masse pour le k^{ieme} continuum s'écrit:

$$(\rho_k)_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k) = \dot{\rho}_k , \quad (2.1)$$

où $\dot{\rho}_k$ est le taux de variation de la masse volumique de l'espèce A_k due aux réactions chimiques (taux de consommation ou de création, selon le cas). En sommant les équations précédentes pour toutes les espèces, et en utilisant la propriété $\sum_{k=1}^N \dot{\rho}_k = 0$ qui exprime que les réactions chimiques ne créent pas de masse, on obtient pour le mélange la forme classique de l'équation de continuité:

$$\rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 . \quad (2.2)$$

En procédant de façon similaire pour les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, on obtient le système:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 , \\ (\rho v_i)_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_i \vec{v}) = \rho F_i + \sigma_{ij,j} , \\ (\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2)_t + \vec{\nabla} \cdot [(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2) \vec{v}] = (\sigma_{ij} v_i)_j + \rho F_i v_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} , \\ (\rho_k)_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}) = \dot{\rho}_k - \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{V}_k) . \end{cases} \quad (2.3)$$

Les notations utilisées sont classiques: \vec{F} désigne les forces extérieures appliquées par unité de masse du mélange, σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes du mélange, ϵ l'énergie interne du mélange ($\rho \epsilon = \sum_k \rho_k \epsilon_k$). De plus, \vec{q} désigne le *flux surfacique d'énergie*, et $\vec{V}_k = \vec{v}_k - \vec{v}$ est la *vitesse de diffusion* de l'espèce k . L'indice temporel t et les indices d'espace i et j indiquent une dérivée partielle lorsqu'ils apparaissent après une virgule ou une parenthèse.

Dans le cas d'un écoulement réactif tridimensionnel, le système (2.3) contient $N+5$ équations. Il est alors commode de considérer comme variables indépendantes les $N+5$ quantités ρ , v_i ($1 \leq i \leq 3$), T , et Y_k , fractions massiques des espèces, définies par les identités $\rho_k = \rho Y_k$. Pour clore le modèle, il reste alors à se donner, ou à exprimer en fonction des variables indépendantes, les termes restants: \vec{F} , σ_{ij} , ϵ , \vec{q} , $\dot{\rho}_k$ et \vec{V}_k .

2.2 Le traitement des trois premiers termes de la liste précédente est tout à fait classique. Les efforts extérieurs sont habituellement donnés (par exemple $\vec{F} = \vec{g}$ dans le

cas de forces de gravité). D'autre part, on suppose pour simplifier que chaque espèce se comporte comme un gaz parfait, et que le mélange est newtonien, en écrivant:

$$\sigma_{ij} = -(p + \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v})\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) , \quad (2.4)$$

où μ est la viscosité du mélange, la pression p étant donnée par:

$$p = \sum_k p_k = \rho RT \sum_k \frac{Y_k}{m_k} , \quad (2.5)$$

R et m_k désignant respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de l'espèce \mathcal{A}_k . Enfin, on a les relations suivantes, classiques en thermodynamique:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_k Y_k \epsilon_k = \sum_k Y_k (h_k - \frac{p_k}{\rho_k}) , \\ &= \sum_k Y_k h_k^0 + \sum_k Y_k \int_{T_0}^T C_p^k dT - \frac{p}{\rho} , \end{aligned} \quad (2.6)$$

où h_k est l'enthalpie de l'espèce \mathcal{A}_k à la température T , h_k^0 son enthalpie de formation à la température de référence T_0 , et C_p^k sa chaleur massique à pression constante.

A ce stade, il nous reste à exprimer les termes de diffusion d'énergie et d'espèces (\vec{q} et $\rho_k \vec{V}_k$), ainsi que les termes de réaction chimique ($\dot{\rho}_k$), termes rarement ou pas du tout rencontrés en mécanique des fluides usuelle. Nous utiliserons pour les effets de transport les lois les plus simples suivantes:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T + \sum_k \rho_k h_k \vec{V}_k , \quad (2.7)$$

qui exprime le flux surfacique \vec{q} comme la somme d'un flux conductif donné par la loi de Fourier (λ est la conductivité thermique du mélange) et des flux diffusifs d'enthalpie de chaque espèce, et:

$$\rho_k \vec{V}_k = -\rho D \vec{\nabla} Y_k , \quad (2.8)$$

(loi de Fick), où $D > 0$ est un coefficient de diffusion. Ces relations, et les lois de Fourier et de Fick dont elle découlent, peuvent être considérées soit comme empiriques, soit comme des expressions très simplifiées des modèles beaucoup plus complexes auxquels conduit la théorie cinétique des gaz (voir Williams [49]).

Exprimons enfin les termes de réaction $\dot{\rho}_k$, dans le cas où une seule réaction chimique, notée:



a lieu dans le mélange gazeux. Les entiers naturels μ_k et ν_k sont les coefficients stoechiométriques de la réaction (un exemple de réaction de ce type est la réaction globale de combustion de l'hydrogène $2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$).

Il est tout d'abord clair que les taux de variation de masse $\dot{\rho}_k$ des différentes espèces dus à la réaction (2.9) sont liés par une relation de la forme:

$$\forall k, \frac{\dot{\rho}_k}{m_k(\nu_k - \mu_k)} = \omega ; \quad (2.10)$$

ω (indépendant de k) est le taux global d'avancement de la réaction (2.9).

La détermination *théorique* de ce taux global ω est un problème difficile, qui fait appel à la physique quantique et fait encore l'objet de nombreux travaux fondamentaux. Pour situer le problème, considérons le cas simple d'une réaction $A + B \rightarrow \text{Produits}$. A l'échelle moléculaire, la réaction ne se produit que lors d'une collision d'une molécule de A et d'une molécule de B , à *condition que* cette collision soit suffisamment énergétique (c'est-à-dire telle que "l'énergie cinétique du mouvement relatif" des deux molécules soit assez grande), et à *condition que* l'"orientation relative" des deux molécules à l'instant du choc permette la réaction (voir Larrouturou [34], Sivashinsky [44], Vincenti-Kruger [48]). Or, la théorie cinétique des gaz permet d'évaluer, à partir de la distribution des vitesses de Maxwell, le nombre des collisions entre molécules par unités de volume et de temps, et même le nombre de ces collisions qui sont suffisamment énergétiques. Mais cette théorie, dans laquelle les molécules sont vues comme des sphères solides, ne peut évidemment considérer la deuxième condition: le "facteur stérique", c'est-à-dire la fraction des collisions suffisamment énergétiques qui produisent effectivement la réaction, ne peut être évalué qu'en utilisant l'équation de Schrödinger, ou mesuré expérimentalement.

Néanmoins, l'étude du taux de collisions par unité de volume et de temps donne les principaux termes intervenant dans l'expression du taux de réaction ω . On obtient pour la réaction (2.9):

$$\omega = \prod_k \left(\frac{\rho Y_k}{m_k} \right)^{\mu_k} F(T) . \quad (2.11)$$

Cette dépendance de ω par rapport aux fractions massiques est connue sous le nom de loi d'action de masse. La fonction $F(T)$ s'écrit sous la forme:

$$F(T) = B(T) \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{RT} \right), \quad (2.12)$$

où $B(T)$ est une fonction algébrique de la température, et où la constante \mathcal{E} est l'énergie d'activation de la réaction. Le terme exponentiel intervenant dans cette relation est le terme d'Arrhénius.

2.3 Nous avons maintenant donné l'expression de tous les termes apparaissant dans le système (2.3). Dans la réalité, la description complète d'un écoulement réactif nécessite de prendre en compte un très grand nombre d'espèces gazeuses et de réactions chimiques (de l'ordre d'une ou plusieurs dizaines; voir par exemple Clavin [16]): le système (2.3) comprend alors un grand nombre d'équations, et de très nombreux termes source non linéaires exprimant les variations des masses volumiques dues aux différentes réactions chimiques.

Nous éviterons les difficultés liées aux aspects de cinétique chimique complexe en faisant à partir de maintenant l'hypothèse simplificatrice importante qu'une seule réaction chimique exothermique du type simple:



a lieu dans le mélange. En particulier, nous supposons que le mélange est constitué des deux seules espèces \mathcal{R} et \mathcal{P} , de fractions massiques $Y_{\mathcal{R}}$ et $Y_{\mathcal{P}} = 1 - Y_{\mathcal{R}}$.

Remarque 2.1: Il existe quelques travaux mathématiques rigoureux concernant l'étude de phénomènes de combustion et prenant en compte une cinétique chimique plus complexe que la réaction simple $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}$. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter les travaux de S. Heinze [25], ainsi que de C. Brauner et C. Schmidt-Lainé [13], B. Larrouturou [33] et D. Terman [47]. •

Nous pouvons maintenant réécrire le système (2.3) en tenant compte des relations (2.4) à (2.12); pour simplifier, nous négligeons désormais les termes visqueux et les

forces extérieures, et nous notons $Y_{\mathcal{R}} = Y$:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 , \\ (\rho v_i)_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_i \vec{v}) = -p_{,i} , \\ E_t + \vec{\nabla} \cdot [(E + p) \vec{v}] = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) , \\ (\rho Y)_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho Y \vec{v}) = -m\omega(Y, T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) , \\ mp = \rho RT , \quad \omega(Y, T) = \frac{\rho Y}{m} F(T) ; \end{cases} \quad (2.14)$$

la constante $Q = h_{\mathcal{R}}^0 - h_{\mathcal{P}}^0 > 0$ est la chaleur dégagée par la réaction chimique (2.13) par unité de masse du réactant, et

$$E = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 = Q \rho Y + \rho C_v T + \rho (h_{\mathcal{P}}^0 - C_p T_0) + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.15)$$

est l'énergie totale par unité de volume. On a utilisé le fait que les deux espèces \mathcal{R} et \mathcal{P} avaient la même masse molaire m et les mêmes chaleurs massiques (constantes) C_p et C_v vérifiant la relation de Mayer $m(C_p - C_v) = R$.

Il est classique en combustion de remplacer le système précédent, écrit sous forme conservative, par le système:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 , \\ \rho v_{i,t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_i = -p_{,i} , \\ \rho C_p T_t + \rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = m Q \omega(Y, T) + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + p_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p , \\ \rho Y_t + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Y = -m\omega(Y, T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) , \\ mp = \rho RT , \quad \omega(Y, T) = \frac{\rho Y}{m} F(T) , \end{cases} \quad (2.16)$$

dans lequel on a essentiellement transformé l'équation de conservation de l'énergie en utilisant les autres équations. Le terme non linéaire de réaction chimique $\omega(Y, T)$ apparaît maintenant à la fois dans l'équation de la fraction massique et dans l'équation de la température.

Les deux systèmes (2.14) et (2.16) décrivent donc l'écoulement d'un mélange gazeux réactif de deux espèces, sous les hypothèses énoncées plus haut (chimie simple, absence d'efforts extérieurs ou visqueux...). Même avec ces hypothèses, les systèmes obtenus modélisent des phénomènes physiques aussi différents que des déflagrations et des détonations (voir Courant-Friedrichs [18]); ces modèles sont utilisés dans de

nombreuses études numériques (voir par exemple Benkhaldoun et al [4], Oran-Boris [39]). Mais l'analyse mathématique (rigoureuse) de ces systèmes complets, fortement couplés et non linéaires, est pour le moment hors d'atteinte. C'est pourquoi nous introduisons maintenant les principaux systèmes *simplifiés* déduits des précédents qui sont utilisés de façon classique en théorie de la combustion (et également dans les calculs numériques).

3. APPROXIMATIONS CLASSIQUES EN COMBUSTION

3.1. Approximation isobare

La principale approximation utilisée pour l'étude des phénomènes de combustion lente (c'est-à-dire de déflagration ou encore de propagation de flammes) provient du caractère fortement subsonique de ces phénomènes: la valeur d'un nombre de Mach M représentatif de l'écoulement est de l'ordre de 10^{-2} . Un développement *formel* des variables en fonction des puissances du (petit) paramètre M montre alors que la pression du mélange est constante en espace à l'ordre M^2 , c'est-à-dire que l'on peut écrire:

$$p(\vec{x}, t) = P(t) + \tilde{p}(\vec{x}, t) , \quad (3.1)$$

avec $\frac{\tilde{p}}{P} = O(M^2) \ll 1$. Le même développement formel montre aussi que le terme $\vec{\nabla} p$ est négligeable par rapport aux autres termes dans l'équation de conservation de l'énergie dans (2.16), mais pas dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans le cas où la combustion a lieu dans un récipient ouvert la pression $P(t)$ est alors une constante: $P(t) = P_0$, par exemple la pression atmosphérique; si la combustion a lieu dans une chambre fermée, P dépend effectivement du temps.

Nous considérerons à partir de maintenant la combustion d'un mélange des deux espèces \mathcal{R} et \mathcal{P} apparaissant dans (2.13) dans un tube cylindrique tridimensionnel infini $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in O\}$ (O désigne un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^2). En désignant maintenant par u, v et w les composantes de la vitesse \vec{v} et en utilisant les

considérations précédentes, nous pouvons décrire la propagation d'une flamme dans le tube S par les *équations des flammes isobares*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 , \\ \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + \rho w u_z = -p_x , \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + \rho w v_z = -p_y , \\ \rho w_t + \rho u w_x + \rho v w_y + \rho w w_z = -p_z , \\ \rho C_p T_t + \rho C_p u T_x + \rho C_p v T_y + \rho C_p w T_z = m Q \omega(Y, T) + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) , \\ \rho Y_t + \rho u Y_x + \rho v Y_y + \rho w Y_z = -m \omega(Y, T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) , \\ \rho R T = m P_0 , \quad \omega(Y, T) = \frac{\rho Y}{m} F(T) . \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Remarque 3.1: Un système d'équations différent est également proposé par A. Majda [36] pour décrire la combustion d'un mélange gazeux dans la limite $M \rightarrow 0$. Ce système, qui concerne la combustion en milieu fermé, utilise la décomposition du champ de vitesse en somme d'un champ à divergence nulle et d'un champ de gradient, et a fait l'objet d'une étude mathématique rigoureuse (voir Embid [19]). •

L'étude mathématique du système (3.2) est présentée dans la section 4, dans le cas monodimensionnel, stationnaire ou instationnaire. Le cas monodimensionnel stationnaire, qui a fait l'objet de nombreuses analyses par les physiciens (voir par exemple Buckmaster-Ludford [15], Clavin [16], Clavin-Liñan [17], Larrouturou [34]), se ramène très simplement à un système de deux équations différentielles ordinaires. En effet, la première équation du système (3.2) s'écrit dans ce cas:

$$(\rho u)_x = 0 , \quad (3.3)$$

d'où $\rho u = c$, constante inconnue. En posant $G(T) = \frac{m P_0}{R T} F(T)$, on peut alors réécrire le système (3.2) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} c C_p T_x = Q Y G(T) + (\lambda T_x)_x , \\ c Y_x = -Y G(T) + (\rho D Y_x)_x , \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{m P_0}{R T} , \\ u = \frac{c}{\rho} , \\ p_x = -c u_x . \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Un découplage apparaît donc: comme on le verra dans la section 4, les deux équations (3.4) (et les conditions aux limites qui leur sont associées) déterminent T , Y et la constante c , les variables ρ , u et p se déduisant ensuite des équations (3.5).

Si l'on considère la *propagation d'une flamme* dans le tube S (c'est-à-dire le type particulier de combustion qui se produit lorsque l'on effectue un allumage localisé en un point ou sur une partie du tube), les conditions aux limites associées aux équations (3.4) sont du type suivant:

$$\begin{cases} T(-\infty) = T_u, & Y(-\infty) = Y_u, \\ T(+\infty) = T_b, & Y(+\infty) = 0; \end{cases} \quad (3.6)$$

T_u et Y_u désignent respectivement la température et la fraction massique du réactant dans le mélange frais où la flamme se propage, et T_b est la température du gaz brûlé; la dernière condition traduit le fait que la combustion est complète: il n'existe plus de réactant derrière la flamme. La température des gaz brûlés est d'ailleurs donnée par un simple bilan thermique (obtenu en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ la somme de la première équation (3.4) et de la seconde équation (3.4) multipliée par Q):

$$T_b = T_u + \frac{QY_u}{C_p}. \quad (3.7)$$

On peut utiliser cette relation pour écrire le modèle (3.4) sous une forme normalisée très simple: supposons que les quantités positives λ et $Le = \frac{\lambda}{\rho C_p D}$ (nombre de Lewis) sont constantes, et introduisons les variables normalisées $\Theta = \frac{T - T_u}{T_b - T_u}$, $Z = \frac{Y}{Y_u}$ et $\xi = \frac{C_p}{\lambda} x$. Le système (3.4) et (3.6) devient alors:

$$\begin{cases} c\Theta_\xi = ZH(\Theta) + \Theta_{\xi\xi}, \\ cZ_\xi = -ZH(\Theta) + \frac{1}{Le}Z_{\xi\xi} \text{ sur } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \Theta(-\infty) = 0, & Z(-\infty) = 1, \\ \Theta(+\infty) = 1, & Z(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

où $H(\Theta) = \frac{\lambda}{C_p} G(T)$. Le système normalisé (3.8)-(3.9) est étudié dans les sections 4.1 à 4.3 ci-dessous.

3.2. Modèle thermo-diffusif

Dans le cas multidimensionnel, le découplage précédent n'apparaît pas: les différents effets diffusifs, réactifs et hydrodynamiques (convection, expansion des gaz...)

présents dans le phénomène sont étroitement couplés, de façon non linéaire. C'est la raison pour laquelle les physiciens ont introduit une simplification supplémentaire, *l'approximation de densité constante* (voir Barenblatt et al [3], Sivashinsky [44]). Cette approximation est beaucoup plus brutale que la précédente, et également beaucoup plus délicate à justifier d'un point de vue physique; mais elle conduit à un système d'équations plus simple dans lequel apparaît à nouveau un découplage, et qui a permis des progrès importants dans la compréhension des phénomènes de propagation de flammes (voir Sivashinsky [43], [44]). Dans le cadre de cette approximation, le système (3.2) devient:

$$\rho = \text{Constante} , \quad (3.10)$$

(nouvelle "équation d'état"),

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0 , \\ \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + \rho w u_z = -p_x , \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + \rho w v_z = -p_y , \\ \rho w_t + \rho u w_x + \rho v w_y + \rho w w_z = -p_z , \end{cases} \quad (3.11)$$

et:

$$\begin{cases} \rho C_p T_t + \rho C_p u T_x + \rho C_p v T_y + \rho C_p w T_z = Q \rho Y F(T) + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) , \\ \rho Y_t + \rho u Y_x + \rho v Y_y + \rho w Y_z = -\rho Y F(T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) . \end{cases} \quad (3.12)$$

Les "variables de combustion" T et Y n'apparaissent donc plus dans le système (3.10)-(3.11) décrivant le comportement des "variables hydrodynamiques" u, v, w, p . Lorsque l'on s'intéresse au système (3.12) décrivant la structure de la flamme (c'est-à-dire les champs de température et de fraction massique), on peut donc considérer la vitesse (u, v, w) comme donnée, satisfaisant (3.11). Pour le cas qui nous intéresse où la combustion a lieu dans un tube cylindrique infini, il est classique de considérer un champ de vitesse parallèle aux parois du tube: $v \equiv 0, w \equiv 0$. Les solutions stationnaires du système (3.12) sont alors données par les équations (noter que (3.11) implique $u = u(y, z)$):

$$\begin{cases} \rho C_p u(\bar{y}) T_x = Q \rho Y F(T) + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) , \\ \rho u(\bar{y}) Y_x = -\rho Y F(T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} Y) \text{ dans } S = \mathbb{R} \times \mathcal{O} ; \end{cases} \quad (3.13)$$

on a noté $\bar{y} = (y, z) \in \mathcal{O}$. A ce système sont associées les conditions aux limites:

$$\begin{cases} T(-\infty, \bar{y}) = T_u , \quad Y(-\infty, \bar{y}) = Y_u , \\ T(+\infty, \bar{y}) = T_b , \quad Y(+\infty, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{y} \in \mathcal{O} , \end{cases} \quad (3.14)$$

aux extrémités du tube, et:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial \mathcal{O}, \quad (3.15)$$

sur la paroi du tube (ces dernières conditions expriment que la paroi est adiabatique et imperméable, non catalytique); on a noté n la normale unitaire extérieure sur la paroi $\mathbb{R} \times \partial \mathcal{O}$ du tube S .

Lorsque $Le = 1$, il est facile de vérifier que toute solution de (3.13)-(3.15) satisfait l'identité $QY = C_p(T_b - T)$. On obtient alors un modèle avec une seule équation aux dérivées partielles, que l'on peut écrire sous forme normalisée, en utilisant la température réduite Θ déjà introduite et des coordonnées adimensionnées $\xi \in \mathbb{R}$, $\bar{\eta} \in \Omega$, ouvert de \mathbb{R}^2 au lieu de x et \bar{y} :

$$\begin{cases} u(\bar{\eta})\Theta_\xi = H(\Theta) + \Delta\Theta & \text{dans } S = \mathbb{R} \times \Omega, \\ \Theta(-\infty, \bar{\eta}) = 0, \quad \Theta(+\infty, \bar{\eta}) = 1 & \text{pour } \bar{\eta} \in \Omega, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

Quelques résultats mathématiques relatifs au problème (3.16) seront présentés dans la section 5.

4. SYSTEMES D'EQUATIONS EN DIMENSION 1

Nous présentons dans cette section l'étude des solutions stationnaires et instationnaires monodimensionnelles du modèle (3.2) qui décrit dans le cadre de l'approximation isobare la propagation d'une flamme prémélangée avec chimie simple.

4.1. Le problème stationnaire

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les solutions stationnaires monodimensionnelles du modèle isobare (3.2) sont données par un système d'équations différentielles ordinaires (3.8)-(3.9). Changeant un peu les notations, et notant en particulier T et Y les température et fraction massique normalisées Θ et Z respectivement, nous écrivons ce système sous la forme:

$$\begin{cases} -T'' + cT' = f(T)Y, \\ -\Lambda Y'' + cY' = -f(T)Y \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} T(-\infty) = 0, & Y(-\infty) = 1, \\ T(+\infty) = 1, & Y(+\infty) = 0; \end{cases} \quad (4.2)$$

Λ est une constante positive, l'inverse du nombre de Lewis Le , et c est un paramètre réel à déterminer. Nous supposons que la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les hypothèses suivantes, où $\theta \in]0, 1[$:

$$f \text{ est lipschitzienne sur } [\theta, 1]; \quad (4.3)$$

$$f \equiv 0 \text{ sur } [0, \theta[\text{ et } f(s) > 0 \quad \forall s \in]\theta, 1]. \quad (4.4)$$

On remarquera que f peut présenter une discontinuité en θ . Le terme $f(T)Y$ représente le taux de la réaction et l'hypothèse (4.4) signifie que la réaction ne se produit pas tant que la température n'a pas atteint un certain seuil θ : il s'agit donc d'un modèle avec température d'inflammation.

Lorsque $\Lambda = 1$, on voit immédiatement que $Y = 1 - T$; le système se réduit à une seule équation:

$$\begin{cases} -T'' + cT' = g(T) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ T(-\infty) = 0, \quad T(+\infty) = 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

où l'on a posé $g(s) = f(s)(1 - s)$.

Ce type d'équations qui gouverne la propagation de fronts stationnaires intervient dans de nombreux domaines, notamment, pour des fonctions g vérifiant d'autres hypothèses, dans des modèles de biologie (dynamique des populations); on pourra consulter en particulier P. C. Fife [20], [21] le livre de J. Smoller [45] ou D. G. Aronson et H. F. Weinberger [2]. Pour les modèles de combustion avec température d'ignition comme ci-dessus, le cas d'une seule équation scalaire (4.5) a été résolu dans les travaux de A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii et N. S. Piskunov [31], de W. Johnson [27], W. Johnson et W. Nachbar [28], de Ja. I. Kanel' [29], [30], de Ya. Zeldovich [50], ou Ya. Zeldovich et al [51]. Les travaux précédents s'appuient sur l'analyse du plan des phases et ne concernent donc qu'une *seule* équation (et non un système comme (4.1)). Ils établissent notamment sous des hypothèses correspondant à (4.3)-(4.4) l'existence et l'unicité d'une solution (c, T) de (4.5).

Le *système* a été résolu par H. Berestycki, B. Nicolaenko et B. Scheurer [10]: sous les conditions (4.3)-(4.4), ils montrent l'existence d'une solution (c, T, Y) de (4.1)-(4.2). L'unicité de la solution (c'est-à-dire l'unicité de c et modulo une translation de l'origine de T et Y) a ensuite été établie dans le cas $0 < \Lambda \leq 1$ par M. Marion [38]. La question de l'unicité lorsque $\Lambda > 1$ (i.e. pour $Le < 1$) demeure un problème ouvert.

La méthode utilisée dans [10] pour établir l'existence d'une solution du système (4.1)-(4.2) repose sur une troncature du domaine, l'utilisation du degré topologique et un argument de passage à la limite. Cette méthode (sauf pour ce qui est des estimations a priori) est analogue à celle que nous indiquons dans la section 5.1 ci-dessous pour le problème multidimensionnel.

Remarque 4.1: Le même système (4.1)-(4.2) a été résolu par M. Marion [37], [38] dans le cas où on ne suppose pas l'existence d'une température d'ignition θ . La fonction f vérifie alors $f(0) = 0$ (pour éviter la "difficulté de la frontière froide"; voir [10], [37]) et $f > 0$ sur $]0, 1[$. •

Remarque 4.2: Dans le prolongement des travaux qui viennent d'être cités, signalons aussi l'étude mathématique du système décrivant une flamme plane stationnaire *non adiabatique* réalisée par V. Giovangigli [23]; ce système d'équations différentielles ordinaires est analogue à (4.1)-(4.2), avec un terme source supplémentaire modélisant une perte de chaleur dans l'équation de la température. •

4.2. Le cas d'une équation scalaire

A titre d'exemple, nous nous bornons ici à présenter une "méthode de tir" très simple pour la résolution de l'équation (4.5). Cette méthode a été développée dans [10].

Nous décomposons la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution de (4.5) en plusieurs étapes:

Etape 1: Il est facile de voir qu'une solution (c, T) de (4.5) vérifie nécessairement $c > 0$ et $T' > 0$ sur \mathbb{R} . On peut donc supposer (après translation de l'origine) que $T(0) = \theta$. Ainsi, d'après (4.4) et (4.5), $T(x) = \theta e^{cx}$ pour $x < 0$. On se ramène donc au problème aux valeurs initiales posé sur \mathbb{R}_+ :

$$\begin{cases} -T'' + cT' = g(T) & \text{pour } x \geq 0, \\ T(0) = \theta, \quad T'(0) = c\theta, \end{cases} \quad (4.6)$$

dont on cherche à déterminer une solution telle que $T(+\infty) = 1$. •

Pour $c > 0$, on désignera par T_c la solution du problème aux valeurs initiales (4.6).

Etape 2: On prolonge g en posant $g(s) = 0$ pour $s \notin [0, 1]$. Cela permet de montrer que:

(i) s'il existe $x_1 > 0$ tel que $T_c(x_1) = 1$, alors $T'_c(x) > 0$ pour $x > x_1$ et $T_c(+\infty) = +\infty$, tandis que

(ii) s'il existe $x_2 > 0$ tel que $T_c(x_2) = \theta$, alors $T'_c(x) < 0$ pour $x > x_2$ et $T_c(+\infty) = -\infty$;

(iii) de plus, s'il existe $x_0 > 0$ tel que $T'_c(x_0) = 0$, alors il existe $x_1 > x_0$ tel que $T_c(x_1) = \theta$. •

Etape 3: On envisage les deux types de comportement (i) et (ii) pour T_c et on introduit les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}_+^* :

$$\Gamma_+ = \{c > 0, \exists x_1 > 0, T_c(x_1) = 1\}, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_- = \{c < 0, \exists x_2 > 0, T_c(x_2) = \theta\}. \quad (4.8)$$

Il est immédiat de voir que Γ_+ et Γ_- sont deux ouverts disjoints de \mathbb{R}_+^* . •

Etape 4: Montrons que $\Gamma_+ \neq \emptyset$, et plus précisément que $[c_+, +\infty[\subset \Gamma_+$, où $c_+ = \theta^{-1} \left(2 \int_0^1 g(s) ds \right)^{1/2}$.

En effet, posons $G(z) = \int_0^z g(s) ds$. En multipliant l'équation (4.5) par T' , on obtient pour $0 \leq a < b$:

$$-\frac{1}{2} T'_c(x)^2 \Big|_{x=a}^{x=b} + c \int_a^b T'_c(x)^2 dx = G(T_c(x)) \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (4.9)$$

Soit $c > 0$ tel que $c \notin \Gamma_+$. Cela signifie que soit $\exists x_0 > 0, T'_c(x_0) = 0$, soit $T' > 0$ et $T < 1$ sur \mathbb{R}_+ ; dans ce deuxième cas on voit que $T(+\infty) = 1$ et $T'(+\infty) = 0$: on notera alors $x_0 = +\infty$. On a donc dans tous les cas ($0 < x_0 \leq +\infty$), pour $c \notin \Gamma_+$:

$$\frac{1}{2} c^2 \theta^2 + c \int_0^{x_0} T'_c(x)^2 dx = G[T_c(x_0)] \leq G(1). \quad (4.10)$$

L'inégalité (4.10) montre que si $c \geq c_+$ alors, nécessairement, $c \in \Gamma_+$. •

Etape 5: Montrons que $\Gamma_- \neq \emptyset$, et plus précisément que $[0, c_-[\subset \Gamma_-$, où $c_- = \sqrt{2G(1)}$.

En effet, soit $c > 0$ tel que $c \notin \Gamma_-$; alors $T' > 0$ sur \mathbb{R}_+ . On voit facilement (comme ci-dessus) qu'il existe alors x_0 , $0 < x_0 \leq +\infty$ tel que $T' > 0$ sur $[0, x_0[$, $T(x_0) = 1$ et $T'(x_0) \geq 0$. En multipliant l'équation par $1 - T$ et en intégrant sur $]0, x_0[$, on a:

$$\int_0^{x_0} T_c'(x)^2 dx < \frac{c}{2}(1 - \theta^2). \quad (4.11)$$

D'autre part, on a par (4.9):

$$G(1) = -\frac{1}{2}T_c'(x_0)^2 + \frac{1}{2}c^2\theta^2 + c \int_0^{x_0} T_c'(x)^2 dx. \quad (4.12)$$

En combinant (4.11) et (4.12) on arrive à:

$$G(1) < \frac{c^2}{2}\theta^2. \quad (4.13)$$

On voit ainsi que $]0, \sqrt{2G(1)}] \subset \Gamma_-$. •

Etape 6: Par connexité, on voit donc qu'il existe $c > 0$ tel que $c \notin \Gamma_+ \cup \Gamma_-$; T_c est alors une solution de (4.6) vérifiant $T_c(+\infty) = 1$ et, partant, (c, T_c) est une solution de (4.5). •

Etape 7: Terminons en prouvant l'unicité d'une solution de (4.5). Il suffit de raisonner sur (4.6). Soient (c_1, T_1) et (c_2, T_2) des solutions de (4.6) vérifiant $T_1(+\infty) = T_2(+\infty) = 1$. On pose $x_i(s) = T_i^{-1}(s)$ (fonction réciproque) et $y_i(s) = \frac{d}{ds}x_i(s)$. On notera que $\frac{1}{y_i(\theta)} = c_i\theta$, et que y_i vérifie l'équation:

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{y_i(s)} \right) + c_i = g(s)y_i(s). \quad (4.14)$$

Supposons que $0 < c_1 < c_2$. Donc, $y_1(\theta) > y_2(\theta)$. S'il existe $t \in]\theta, 1[$ tel que $y_1(s) > y_2(s)$, $\forall s \in]\theta, t[$ et $y_1(t) = y_2(t)$, on obtient en utilisant (4.14):

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) \Big|_{s=t} = c_2 - c_1 > 0, \quad (4.15)$$

ou encore:

$$\frac{d}{ds}(y_1 - y_2) \Big|_{s=t} > 0, \quad (4.16)$$

ce qui est à l'évidence absurde. C'est donc que $y_1(s) > y_2(s)$, $\forall s \in]\theta, 1[$. On intègre alors (4.14) sur $]\theta, 1[$ en observant que $\frac{1}{y_i(s)} \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 1$. Cela produit:

$$c_1 - c_2 = \int_{\theta}^1 g(s)(y_1 - y_2)ds, \quad (4.17)$$

ce qui est de nouveau impossible puisque $c_1 - c_2 < 0$ et $y_1 - y_2 > 0$ sur $[\theta, 1[$. L'unicité de la solution de (4.5) en résulte. •

Remarque 4.3: La démonstration ci-dessus est détaillée dans [10]. Elle permet également de traiter le cas de coefficients de diffusion non linéaires où l'équation (4.5) est remplacée par:

$$-(k(T)T')' + cT' = g(T) . \bullet \quad (4.18)$$

4.3. Limite singulière du système pour les hautes énergies d'activation

Un paramètre intervenant dans le terme de réaction (2.11)-(2.12) joue un rôle important: l'énergie d'activation \mathcal{E} . Dans un problème de propagation de flamme, \mathcal{E} est très grand par rapport au produit RT apparaissant aussi dans le terme exponentiel d'Arrhénius. C'est pourquoi la limite asymptotique du problème (4.1)-(4.2) pour les hautes énergies d'activation, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{E} \rightarrow +\infty$, est utilisée de façon systématique par les physiciens: le comportement des solutions de (4.1)-(4.2) pour les grandes valeurs de \mathcal{E} a été prédit de façon formelle par plusieurs auteurs (voir par exemple Buckmaster-Ludford [15], Clavin [16], Sivashinsky [44], Zeldovich et Frank-Kamenetskii [52]). Ce comportement est établi de manière rigoureuse dans le travail de H. Berestycki, B. Nicolaenko et B. Scheurer [10] dont nous extrayons le théorème 4.4 ci-dessous (voir Théorèmes 9.4 et 11.1 dans [10]).

Pour mettre en évidence la dépendance en \mathcal{E} du terme de réaction introduisons le paramètre positif ϵ défini par $\epsilon^{-1} = \frac{\mathcal{E}}{RT_b} \frac{T_b - T_u}{T_b}$ (ϵ^{-1} est appelé le nombre de Zeldovich; voir Clavin [16]); nous noterons désormais $f(T) = f_{\epsilon}(T)$ le terme de taux de réaction dans (4.1). Nous supposons que la dépendance de ce terme en ϵ est du type:

$$f_{\epsilon}(s) = \frac{1}{\epsilon^2} \Phi \left(\frac{s-1}{\epsilon} \right) \quad \text{pour } \theta \leq s \leq 1, \quad (4.19)$$

où, par exemple, Φ est l'exponentielle $\Phi(\sigma) = e^{\sigma}$ (voir par exemple Clavin [16]).

Les conditions suivantes sont imposées pour le comportement de f_ϵ (outre les conditions (4.3) et (4.4)):

$$\Phi \in C^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^*) , \quad (4.20)$$

$$\exists \alpha \in]\frac{1}{2}, 1[, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 \leq s \leq \theta_\epsilon} f_\epsilon(s) \right] = 0 , \quad \text{avec } \theta_\epsilon = 1 - \epsilon^\alpha , \quad (4.21)$$

$$\int_{-\infty}^0 |\sigma| \Phi(\sigma) d\sigma = m \quad \text{avec } 0 < m < +\infty , \quad (4.22)$$

$$\Phi \text{ admet un nombre fini d'extrema sur }]-\infty, 0[. \quad (4.23)$$

En un sens, les conditions (4.19)-(4.22) (qui sont toutes satisfaites dans le cas typique où $\Phi(\sigma) = e^\sigma$ pour $\sigma \in \mathbb{R}_-$) reviennent à dire que $(1-s)f_\epsilon(s)$ tend vers une masse de Dirac " $m\delta_{1-0}(s)$ concentrée à gauche de 1"; (4.23) est une condition purement technique. Des hypothèses plus générales que (4.19)-(4.23) sont exprimées par (4.21) et la condition suivante:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 f_\epsilon(s)(1-s)ds = m . \quad (4.24)$$

On désigne par $(c_\epsilon, T_\epsilon, Y_\epsilon)$ une solution du système correspondant à f_ϵ :

$$\begin{cases} -T_\epsilon'' + c_\epsilon T_\epsilon' = f_\epsilon(T_\epsilon)Y_\epsilon , \\ -\Lambda Y_\epsilon'' + c_\epsilon Y_\epsilon' = -f_\epsilon(T_\epsilon)Y_\epsilon \text{ sur } \mathbb{R} , \\ T_\epsilon(-\infty) = 0 , \quad Y_\epsilon(-\infty) = 1 , \\ T_\epsilon(+\infty) = 1 , \quad Y_\epsilon(+\infty) = 0 , \end{cases} \quad (4.25)$$

et vérifiant de plus la condition de normalisation:

$$T_\epsilon(0) = \theta \quad (4.26)$$

(le problème (4.1)-(4.2) étant invariant par translation, le passage à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ n'a de sens que si l'on a normalisé la solution par une condition du type (4.26)).

Le résultat suivant décrit la limite singulière de (4.25)-(4.26) quand $\epsilon \rightarrow 0$:

Théorème 4.4: [10]

On suppose que f_ϵ vérifie les conditions (4.3), (4.4) et (4.19)-(4.23). Soit $(c_\epsilon, T_\epsilon, Y_\epsilon)$ une solution de (4.25)-(4.26).

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $(c_\epsilon, T_\epsilon, Y_\epsilon)$ converge vers (c, T, Y) en ce sens que $c_\epsilon \rightarrow c$ dans \mathbb{R} et $T_\epsilon \rightarrow T$, $Y_\epsilon \rightarrow Y$ dans $C^0(\mathbb{R}) \cap W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$. La limite (c, T, Y) est donnée par:

$$c = \sqrt{\frac{2m}{\Lambda}} , \quad (4.27)$$

$$T(x) = \begin{cases} \theta \exp(cx) & \text{pour } x \leq \tilde{x} = -\frac{1}{c} \text{Log}(\theta) , \\ 1 & \text{pour } x \geq \tilde{x} , \end{cases} \quad (4.28)$$

$$Y(x) = \begin{cases} 1 - \exp(\frac{c}{\Lambda}(x - \tilde{x})) & \text{pour } x \leq \tilde{x} , \\ 0 & \text{pour } x \geq \tilde{x} . \bullet \end{cases} \quad (4.29)$$

Remarque 4.5: En désignant par $\delta_{\tilde{x}}$ la masse de Dirac concentrée en $x = \tilde{x}$, on remarque que T , Y et \tilde{x} sont déterminés comme solution de:

$$\begin{cases} -T'' + cT' = c\delta_{\tilde{x}} , \\ -\Lambda Y'' + cY' = -c\delta_{\tilde{x}} \text{ sur } \mathbb{R} , \end{cases} \quad (4.30)$$

avec (4.2) et (4.26). •

Remarque 4.6: Sous les conditions plus générales (4.3), (4.4), (4.21) et (4.24) sur f_ϵ , la limite de c_ϵ n'a pas encore été établie pour le système (i.e. lorsque $\Lambda \neq 1$). Cependant, sous ces hypothèses, on peut encore passer à la limite: en effet, soit ϵ_n une suite quelconque tendant vers 0 et $(c_{\epsilon_n}, T_{\epsilon_n}, Y_{\epsilon_n})$ une solution du problème correspondant. Alors, après extraction d'une sous-suite, $(c_{\epsilon_n}, T_{\epsilon_n}, Y_{\epsilon_n}) \rightarrow (c, T, Y)$ au sens du Théorème 4.4, (c, T, Y) vérifie encore (4.2), (4.26) et (4.30), mais on ne connaît pas dans ce cas la valeur explicite de c et, partant, celle de \tilde{x} (voir [10]). Toutefois, nous conjecturons que le Théorème 4.4 reste encore vrai sous ces conditions. •

Le Théorème 4.4 est établi dans [10]. Nous indiquons maintenant les principales étapes de la démonstration; la partie la plus délicate consiste en l'obtention de la limite (4.27) pour c_ϵ . Nous supposons pour simplifier la présentation que, outre les hypothèses déjà faites, Φ dans (4.19) vérifie $\Phi' > 0$ sur \mathbb{R}_-^* (c'est bien le cas de $\Phi(\sigma) = e^\sigma$).

Nous noterons dans la suite:

$$G_\epsilon(t) = \int_0^t f_\epsilon(s)(1-s)ds , \quad (4.31)$$

si bien que (4.22) implique:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_\epsilon(1) = m . \quad (4.32)$$

Etape 1: Lemmes de comparaison

On considère dans un premier temps une solution (c, T, Y) du problème (4.1)-(4.2) pour laquelle nous allons obtenir des estimations. On supposera dans toute la suite (sans le préciser) que f vérifie (4.3) et (4.4). On notera:

$$G(t) = \int_0^t f(s)(1-s)ds . \quad (4.33)$$

Lemme 4.7:

Une solution (c, T, Y) de (4.1)-(4.2) vérifie:

$$\min(1, \Lambda^{-1})(1 - T(x)) \leq Y(x) \leq \max(1, \Lambda^{-1})(1 - T(x)) , \quad (4.34)$$

$$|T(x) + Y(x) - 1| \leq \left| \frac{\Lambda - 1}{\Lambda} \right| (1 - T(x)) . \bullet \quad (4.35)$$

Ces estimations résultent d'arguments simples sur des inéquations différentielles. Par exemple, en posant $H(x) = T(x) + Y(x) - 1$ et en observant (à partir de $-\Lambda H'' + cH' = (1 - \Lambda)T''$) que:

$$\exp\left(\frac{-cx}{\Lambda}\right) H(x) = \frac{1 - \Lambda}{\Lambda} \int_x^{+\infty} \exp\left(\frac{-cs}{\Lambda}\right) T'(s) ds , \quad (4.36)$$

on obtient immédiatement (4.35). Les inégalités (4.34) découlent de (4.35) et d'estimations analogues:

$$\begin{cases} |T + Y - 1| \leq |\Lambda - 1|Y , \\ |T + \Lambda Y - 1| \leq |\Lambda - 1|Y , \\ |T + \Lambda Y - 1| \leq |\Lambda - 1|(1 - T) , \end{cases} \quad (4.37)$$

qui sont obtenues en raisonnant avec H ou avec $W = T + \Lambda Y - 1$. Notons enfin que H représente l'enthalpie normalisée. •

Etape 2: Estimation de c_ϵ

Lemme 4.8:

Une solution (c, T, Y) de (4.1)-(4.2) vérifie:

$$\min(1, \Lambda^{-1}) \leq \frac{c^2}{2G(1)} \leq \frac{1}{\theta^2} \max(1, \Lambda^{-1}) . \bullet \quad (4.38)$$

Preuve: On peut toujours supposer (quitte à effectuer une translation de l'origine) que $T < \theta$ sur \mathbb{R}_- et que $T(0) = \theta$, c'est-à-dire que T vérifie la condition de normalisation (4.26). Cela implique $T'(0) = c\theta$ puisque $T(x) = \theta e^{cx}$ pour $x < 0$. Par ailleurs,

il est facile de voir que $T'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. En intégrant la première équation de (4.1) sur $[0, +\infty[$ après l'avoir multipliée successivement par $1 - T$ et T' , on obtient respectivement:

$$\int_0^{+\infty} T'(x)^2 dx \leq \frac{c}{2}(1 - \theta^2) , \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{2}c^2\theta^2 + c \int_0^{+\infty} T'(x)^2 dx = \int_0^{+\infty} f(T(x))Y(x)T'(x)dx . \quad (4.40)$$

En observant que $T' > 0$, on obtient par (4.34):

$$\min(1, \Lambda^{-1})G(1) \leq \int_0^{+\infty} f(T(x))Y(x)T'(x)dx \leq \max(1, \Lambda^{-1})G(1) . \quad (4.41)$$

En combinant les trois inégalités précédentes, on obtient:

$$\begin{cases} c^2 \geq 2 \min(1, \Lambda^{-1})G(1) , \\ c^2\theta^2 \leq 2 \max(1, \Lambda^{-1})G(1) , \end{cases} \quad (4.42)$$

c'est-à-dire (4.38). •

Etape 3: Estimation de T_ϵ et Y_ϵ dans C^1

On vérifie facilement que pour une solution (c, T, Y) de (4.1)-(4.2), on a $0 < T < 1$ et $0 < T' \leq c$.

Comme $G_\epsilon(1) \rightarrow m$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, ce qui précède montre qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de ϵ telle que toute solution $(c_\epsilon, T_\epsilon, Y_\epsilon)$ de (4.25)-(4.26) vérifie:

$$0 < K^{-1} \leq c_\epsilon \leq K , \quad (4.43)$$

$$\|T_\epsilon\|_{C^1} \leq K . \quad (4.44)$$

On établirait de la même façon que $\|Y_\epsilon\|_{C^1} \leq K$ avec $Y'_\epsilon < 0$. •

Avant l'étape suivante, introduisons quelques notations. On rappelle que $\theta_\epsilon = 1 - \epsilon^\alpha$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (voir (4.21)). On pose aussi $\eta_\epsilon = 1 - \epsilon L$ où $L > 0$ sera fixé ci-dessous. Soit $(c_\epsilon, T_\epsilon, Y_\epsilon)$ une solution de (4.25)-(4.26). Comme $T'_\epsilon > 0$, il existe x_ϵ et y_ϵ déterminés de façon unique par:

$$T_\epsilon(x_\epsilon) = \theta_\epsilon , \quad T_\epsilon(y_\epsilon) = \eta_\epsilon . \quad (4.45)$$

On sait alors que $0 < x_\epsilon < y_\epsilon$ pour $\epsilon > 0$ assez petit.

Etape 4: Estimation de x_ϵ

Lemme 4.9:

Il existe $\bar{x} < +\infty$ et $\epsilon_1 > 0$ tels que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_1[$, on ait $0 < x_\epsilon \leq \bar{x}$. •

Preuve: On intègre la première équation de (4.25) multipliée par T'_ϵ sur $[0, x]$ pour obtenir:

$$-\frac{1}{2}T'_\epsilon(x)^2 + \frac{1}{2}c_\epsilon^2\theta^2 \leq \int_0^x f_\epsilon(T_\epsilon(y))Y_\epsilon(y)T'_\epsilon(y)dy. \quad (4.46)$$

Compte-tenu de (4.34), on a, pour tout $x \in [0, x_\epsilon]$:

$$-\frac{1}{2}T'_\epsilon(x)^2 + \frac{1}{2}c_\epsilon^2\theta^2 \leq \max(1, \Lambda^{-1})G_\epsilon(\theta_\epsilon). \quad (4.47)$$

En combinant (4.47) avec l'estimation (4.38), on voit que pour tout $x \in [0, x_\epsilon]$:

$$\frac{1}{2}T'_\epsilon(x)^2 \geq \min(1, \Lambda^{-1})G_\epsilon(1)\theta^2 - \max(1, \Lambda^{-1})G_\epsilon(\theta_\epsilon). \quad (4.48)$$

Comme $G_\epsilon(\theta_\epsilon) \rightarrow 0$ et $G_\epsilon(1) \rightarrow m > 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, cette inégalité montre qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ (indépendant de ϵ) tels que:

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_1[, \quad \forall x \in [0, x_\epsilon], \quad T'_\epsilon(x) \geq \alpha_1 > 0. \quad (4.49)$$

Puisque $0 < T < 1$, il en découle que $0 < x_\epsilon \leq \alpha_1^{-1}(1 - \theta)$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_1[$. •

Etape 5: Estimation de y_ϵ

Lemme 4.10:

Il existe $\bar{y} < +\infty$ et $\epsilon_2 > 0$ tels que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_2[$, on ait $0 < y_\epsilon \leq \bar{y}$. •

Preuve: Soit $x \in [x_\epsilon, y_\epsilon]$. En raisonnant comme dans l'étape précédente, on montre en intégrant sur $[x_\epsilon, x]$ la première équation de (4.25) multipliée par T'_ϵ et en utilisant (4.38) que:

$$\frac{1}{2}T'_\epsilon(x)^2 \geq \min(1, \Lambda^{-1})G_\epsilon(1)\theta^2 - \max(1, \Lambda^{-1})G_\epsilon(\eta_\epsilon), \quad (4.50)$$

où, on le rappelle, $T_\epsilon(y_\epsilon) = \eta_\epsilon = 1 - \epsilon L$. Or, on a par (4.19):

$$G_\epsilon(\eta_\epsilon) = \int_{(\theta-1)/\epsilon}^{-L} |\sigma| \Phi(\sigma) d\sigma; \quad (4.51)$$

d'après (4.22), on peut rendre $G_\epsilon(\eta_\epsilon)$ arbitrairement petit en choisissant L assez grand. Donc, pour un choix déterminé de L (qui est désormais fixé de cette manière dans la suite), (4.50) fournit l'existence de $\alpha_2 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ tels que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_2[$ et tout $x \in [x_\epsilon, y_\epsilon]$, $T'_\epsilon(x) \geq \alpha_2 > 0$. Comme précédemment, on en déduit que:

$$0 < y_\epsilon - x_\epsilon \leq \frac{1 - \theta_\epsilon}{\alpha_2} \quad \forall \epsilon \in]0, \epsilon_2[, \quad (4.52)$$

et y_ϵ est borné indépendamment de $\epsilon \in]0, \epsilon_2[$. •

L'objectif des trois prochaines étapes est d'établir une estimation précise sur la rapidité de la convergence de T_ϵ vers 1 sur l'intervalle $[x_\epsilon, +\infty[$; cette estimation sera cruciale pour la suite de la démonstration. Nous allons montrer que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x_\epsilon}^{+\infty} (1 - T_\epsilon(x)) dx = 0 . \quad (4.53)$$

Etape 6: Estimation de $\int_{x_\epsilon}^{y_\epsilon} (1 - T_\epsilon(x)) dx$

En utilisant (4.52), on a:

$$\int_{x_\epsilon}^{y_\epsilon} (1 - T_\epsilon(x)) dx \leq \int_{x_\epsilon}^{y_\epsilon} (1 - \theta_\epsilon) dx \leq \frac{(1 - \theta_\epsilon)^2}{\alpha_2} , \quad (4.54)$$

et comme $\theta_\epsilon = 1 - \epsilon^\alpha$,

$$\int_{x_\epsilon}^{y_\epsilon} (1 - T_\epsilon(x)) dx = O(\epsilon^{1+\delta}) , \quad (4.55)$$

avec $\delta = 2\alpha - 1 > 0$. •

Etape 7: Estimation de $\int_{y_\epsilon}^{+\infty} Y_\epsilon(x) dx$

On définit la fonction $F_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $F_\epsilon(0) = 0$ et:

$$F'_\epsilon(s) = \frac{s f'_\epsilon(s)}{f_\epsilon(s)^2} . \quad (4.56)$$

La première équation de (4.25), divisée par $f_\epsilon(T_\epsilon)$ nous donne:

$$\begin{aligned} \int_{y_\epsilon}^{+\infty} Y_\epsilon(x) dx &= \frac{c_\epsilon}{f_\epsilon(1)} + \frac{1}{f_\epsilon(\eta_\epsilon)} [T'_\epsilon(y_\epsilon) - c_\epsilon \eta_\epsilon] \\ &\quad + c_\epsilon [F_\epsilon(1) - F_\epsilon(\eta_\epsilon)] - J_\epsilon . \end{aligned} \quad (4.57)$$

où:

$$J_\epsilon = \int_{y_\epsilon}^{+\infty} \frac{f'_\epsilon(T_\epsilon(x))}{f_\epsilon(T_\epsilon(x))^2} T'_\epsilon(x)^2 dx . \quad (4.58)$$

On estime successivement les quatre termes du membre de droite dans (4.57).

(i) D'après (4.19) et (4.43), $\frac{c_\epsilon}{f_\epsilon(1)} = \epsilon^2 \frac{c_\epsilon}{\Phi(0)} = O(\epsilon^2)$.

(ii) De même, comme $f_\epsilon(\eta_\epsilon) = \epsilon^{-2}\Phi(-L)$, et avec les estimations a priori (4.43) et (4.44), on a:

$$\left| \frac{1}{f_\epsilon(\eta_\epsilon)} [T'_\epsilon(y_\epsilon) - c_\epsilon T_\epsilon(y_\epsilon)] \right| = O(\epsilon^2) . \quad (4.59)$$

(iii) On a aussi:

$$\begin{aligned} F_\epsilon(1) - F_\epsilon(\eta_\epsilon) &= \epsilon^3 \int_{-L}^0 \Phi(\sigma)^{-1} d\sigma - \epsilon^2 \Phi(0)^{-1} \\ &\quad - \epsilon^3 L \Phi(-L)^{-1} + \epsilon^2 \Phi(-L)^{-1} , \end{aligned} \quad (4.60)$$

et donc $F_\epsilon(1) - F_\epsilon(\eta_\epsilon) = O(\epsilon^2)$.

(iv) Pour le dernier terme, on observe que:

$$0 < J_\epsilon \leq \sup_{x>0} T'_\epsilon(x) \int_{y_\epsilon}^{+\infty} \frac{f'_\epsilon(T_\epsilon)}{f_\epsilon(T_\epsilon)^2} T'_\epsilon dx , \quad (4.61)$$

puisque nous supposons que $\Phi' > 0$; en utilisant (4.44), on obtient:

$$0 < J_\epsilon \leq K \left(\frac{1}{f_\epsilon(\eta_\epsilon)} - \frac{1}{f_\epsilon(1)} \right) \leq \epsilon^2 \frac{K}{\Phi(-L)} . \quad (4.62)$$

On a donc montré que:

$$\int_{y_\epsilon}^{+\infty} Y_\epsilon(x) dx = O(\epsilon^2) . \bullet \quad (4.63)$$

Etape 8: Preuve de (4.53)

Comme $\min(1, \Lambda^{-1})(1 - T_\epsilon(x)) \leq Y_\epsilon(x)$ par (4.34), les estimations (4.55) et (4.63) montrent que:

$$\int_{x_\epsilon}^{+\infty} (1 - T_\epsilon(x)) dx = O(\epsilon^{1+\delta}) , \quad (4.64)$$

avec $0 < \delta$, ce qui implique (4.53). •

Etape 9: Limite de $T'_\epsilon(x_\epsilon)$

En multipliant la première équation dans (4.25) par T'_ϵ et en intégrant sur $[x_\epsilon, +\infty[$, il vient:

$$\frac{1}{2}T'_\epsilon(x_\epsilon)^2 + c_\epsilon \int_{x_\epsilon}^{+\infty} T'_\epsilon(x)^2 dx = \frac{1}{\Lambda} \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f_\epsilon(T_\epsilon(x))(1 - T_\epsilon(x))T'_\epsilon(x) dx + K_\epsilon, \quad (4.65)$$

où:

$$K_\epsilon = \frac{1}{\Lambda} \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f_\epsilon(T_\epsilon(x))W_\epsilon(x)T'_\epsilon(x) dx, \quad (4.66)$$

et:

$$W_\epsilon = T_\epsilon + \Lambda Y_\epsilon - 1. \quad (4.67)$$

Nous allons indiquer la limite des différents termes dans (4.65).

(i) En utilisant (4.44) et (4.45), on a:

$$\int_{x_\epsilon}^{+\infty} T'_\epsilon(x)^2 dx \leq K \int_{x_\epsilon}^{+\infty} T'_\epsilon(x) dx = K(1 - \theta_\epsilon), \quad (4.68)$$

ce qui, au vu de (4.43), donne:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_\epsilon \int_{x_\epsilon}^{+\infty} T'_\epsilon(x)^2 dx = 0. \quad (4.69)$$

(ii) La limite du terme suivant est évidente:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f_\epsilon(T_\epsilon(x))(1 - T_\epsilon(x))T'_\epsilon(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G_\epsilon(1) - G_\epsilon(\theta_\epsilon)] = m. \quad (4.70)$$

(iii) Pour le dernier terme, on remarque que $-W''_\epsilon + c_\epsilon(T_\epsilon + Y_\epsilon - 1)' = 0$, d'où $W'_\epsilon = c_\epsilon(T_\epsilon + Y_\epsilon - 1)$, et donc par (4.35):

$$|W'_\epsilon| \leq c_\epsilon \left| \frac{\Lambda - 1}{\Lambda} \right| (1 - T_\epsilon). \quad (4.71)$$

On obtient alors en utilisant (4.43):

$$|W_\epsilon(x)| \leq K \left| \frac{\Lambda - 1}{\Lambda} \right| \int_x^{+\infty} (1 - T_\epsilon(y)) dy, \quad (4.72)$$

et (4.53) implique donc:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \|W_\epsilon\|_{L^\infty(x_\epsilon, +\infty)} = 0 . \quad (4.73)$$

Comme:

$$|K_\epsilon| \leq \frac{1}{\Lambda} \|W_\epsilon\|_{L^\infty(x_\epsilon, +\infty)} \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f_\epsilon(T_\epsilon(x)) T'_\epsilon(x) dx , \quad (4.74)$$

d'où:

$$|K_\epsilon| \leq \frac{1}{\Lambda \epsilon} \|W_\epsilon\|_{L^\infty(x_\epsilon, +\infty)} \int_{-\infty}^0 \Phi(\sigma) d\sigma , \quad (4.75)$$

et on en déduit:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_\epsilon = 0 . \quad (4.76)$$

Finalement (4.65) et les limites que l'on vient d'établir conduisent à:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T'_\epsilon(x_\epsilon) = \sqrt{\frac{2m}{\Lambda}} . \bullet \quad (4.77)$$

Etape 10: Limite de c_ϵ

En reprenant la première équation (4.25) intégrée sur $[0, x_\epsilon]$ et en utilisant (4.34), on a:

$$0 < -T'_\epsilon(x_\epsilon) + c_\epsilon \theta_\epsilon \leq \max(1, \Lambda^{-1}) \int_0^{x_\epsilon} f_\epsilon(T_\epsilon(x)) (1 - T_\epsilon(x)) dx ; \quad (4.78)$$

D'après (4.21) et le lemme 4.9, on en déduit:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [c_\epsilon - T'_\epsilon(x_\epsilon)] = 0 , \quad (4.79)$$

d'où, par (4.77):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_\epsilon = \sqrt{\frac{2m}{\Lambda}} . \bullet \quad (4.80)$$

Etape 11: Conclusion

Considérons à présent une suite arbitraire $\epsilon_n \rightarrow 0$. Au vu des estimations qui précédent, on peut extraire une sous-suite (notée à nouveau ϵ_n) telle que $x_{\epsilon_n} \rightarrow \tilde{x}$, $T_{\epsilon_n} \rightarrow T$ et $Y_{\epsilon_n} \rightarrow Y$ dans $C_{loc}^0(\mathbb{R})$, avec les propriétés suivantes:

$$T \text{ est croissante et } Y \text{ décroissante (au sens large) ,} \quad (4.81)$$

$$T(x) = 1, \quad Y(x) = 0, \quad \forall x \geq \tilde{x}, \quad (4.82)$$

$$-T'' + cT' = 0, \quad \Lambda Y'' + cY' = 0 \quad \text{pour } x < \tilde{x}, \quad (4.83)$$

$$T(0) = \theta, \quad T'(0) = c\theta. \quad (4.84)$$

$$\text{où } c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_\epsilon = \sqrt{\frac{2m}{\Lambda}}.$$

En utilisant (4.49), on voit que, pour $0 \leq x < x+h \leq \tilde{x}$, $T(x+h) - T(x) \geq \alpha_1 h$: \tilde{x} est donc le plus petit x positif tel que $T(x) = 1$, et on a, pour $x \leq \tilde{x}$:

$$T(x) = \theta e^{cx} = e^{c(x-\tilde{x})}, \quad Y(x) = 1 - e^{c\Lambda^{-1}(x-\tilde{x})}. \quad (4.85)$$

On voit donc que $\tilde{x} = -\frac{1}{c} \text{Log}(\theta)$. Ainsi, c et \tilde{x} , et partant, T et Y , sont déterminés de façon unique. Il est dès lors classique que T_ϵ et Y_ϵ convergent vers T et Y lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Cela conclut la démonstration du Théorème 4.4. •

4.4. Le problème instationnaire

On s'intéresse dans cette section à l'étude des solutions instationnaires monodimensionnelles du système (3.2) obtenu dans le cadre de l'approximation isobare. Nous considérons donc le système, écrit ici sous forme conservative:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = -p_x, \\ (\rho C_p T)_t + (\rho u C_p T)_x - (\lambda T_x)_x = m Q \omega(Y, T), \\ (\rho Y)_t + (\rho u Y)_x - (\rho D Y_x)_x = -m \omega(Y, T), \\ \rho R T = m P_0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (4.86)$$

Ce système est associé aux conditions initiales et aux limites suivantes:

$$T(x, 0) = T^*(x), \quad Y(x, 0) = Y^*(x), \quad (4.87)$$

$$T(-\infty, t) = T_u, \quad Y(-\infty, t) = Y_u, \quad u(-\infty, t) = u_u, \quad (4.88)$$

$$T(+\infty, t) = T_b, \quad Y(+\infty, t) = 0, \quad (4.89)$$

$$p(-\infty, t) = 0, \quad (4.90)$$

où l'on a encore $T_b > T_u > 0$, $Y_u \in]0, 1]$ vérifiant (3.7), et où $u_u \in \mathbb{R}$ est une constante donnée.

On va étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème (4.86)-(4.90), en supposant que les quantités positives $Le = \frac{\lambda}{\rho C_p D}$ (nombre de Lewis), C_p et $\frac{\lambda}{T}$ sont constantes. Les résultats présentés ont été obtenus par B. Larrouturou [33].

Avant d'énoncer ces résultats (Théorèmes 4.11 et 4.12 ci-dessous), il est nécessaire d'introduire quelques notations. On supposera que le taux de réaction est donné par l'expression: $\omega(Y, T) = Y h\left(\frac{T - T_u}{T_b - T_u}\right)$, où la fonction h satisfait les hypothèses:

$$h \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) , \quad h(0) = 0 , \quad (4.91)$$

$$\exists \beta > \frac{1}{2} , \quad \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{|h'(s)|}{s^\beta} < +\infty . \quad (4.92)$$

Nous ne précisons donc plus dans cette section si le modèle comporte ou non une température d'ignition; tout comme l'introduction de la température d'inflammation θ dans les sections précédentes, la condition $h(0) = 0$ est relative à la "difficulté de la frontière froide": pour que le problème soit bien posé, il faut que le taux de réaction $\omega(Y_u, T_u)$ dans les gaz frais soit nul (voir [10], Buckmaster-Ludford [15], M. Marion [37]).

Considérons ensuite une fonction $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\gamma = 0$ sur $] -\infty, -1]$ et $\gamma = 1$ sur $[1, +\infty[$. On pose alors $\gamma_T(x) = T_u + (T_b - T_u)\gamma(x)$, $\gamma_Y(x) = Y_u[1 - \gamma(x)]$, et $\tilde{T} = T^* - \gamma_T$, $\tilde{Y} = Y^* - \gamma_Y$. On utilisera par la suite les hypothèses suivantes [on note L^p , H^m , C^k pour $L^p(\mathbb{R})$, $H^m(\mathbb{R})$, $C^k(\mathbb{R})$]:

$$\tilde{T} \in H^2 \cap L^1 , \quad \tilde{Y} \in H^2 \cap L^1 , \quad (4.93)$$

$$\exists \mu > \frac{3}{2\beta} , \quad \sup_{x < 0} \tilde{T}(x)|x|^\mu < +\infty , \quad (4.94)$$

$$T^* \in L^\infty , \quad T^*(x) \geq T_u \text{ p.p.} , \quad Y^*(x) \in [0, Y_u] \text{ p.p.} . \quad (4.95)$$

Précisons enfin la nature des solutions de (4.86)-(4.90) qui seront considérées. On dira que $(\rho, u, p, T, Y) \in [L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)]^5$ est une solution faible de (4.86)-(4.90) si le système (4.86)-(4.87) est vérifié au sens des distributions et si:

(i) pour $t > 0$, les conditions aux limites (4.88) et (4.89) ont lieu au sens usuel et la condition (4.90) est satisfaite au sens suivant:

$$\exists \tilde{p} \in L^2 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [p(x, t) - \tilde{p}(x)] = 0 ; \quad (4.96)$$

(ii) les inégalités $T(x, t) \geq T_u$, $0 \leq Y(x, t) \leq Y_u$ sont satisfaites p.p., et $T \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty)$.

De plus, une solution faible de (4.86)-(4.90) sera dite solution classique si toutes les fonctions et les dérivées partielles apparaissant dans (4.86) sont continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et si la condition aux limites (4.90) est satisfaite au sens classique pour $t \geq 0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats suivants:

Théorème 4.11:

On suppose que les hypothèses (4.91)-(4.95) sont vérifiées et que h est bornée. Il existe alors une unique solution faible de (4.86)-(4.90) satisfaisant:

$$T - \gamma_T, Y - \gamma_Y \in C(\mathbb{R}_+, L^2). \quad (4.97)$$

De plus, cette solution satisfait:

$$\begin{cases} T, Y, \rho \in C(\mathbb{R}_+, C^1 \cap L^\infty); u \in C(\mathbb{R}_+, C \cap L^\infty); \\ T - \gamma_T, Y - \gamma_Y \in C(\mathbb{R}_+, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2). \end{cases} \quad (4.98)$$

Théorème 4.12:

On suppose que les hypothèses (4.91)-(4.95) sont vérifiées et que h est bornée; on suppose en outre que $\tilde{T}, \tilde{Y} \in H^4$ et que $h \in W_{loc}^{3, \infty}$. Il existe alors une unique solution classique de (4.86)-(4.90) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Cette solution satisfait:

$$\begin{cases} T, Y, \rho \in C(\mathbb{R}_+, C^3) \cap C^1(\mathbb{R}_+, C^1); \\ u \in C(\mathbb{R}_+, C^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, C). \end{cases} \quad (4.99)$$

Remarque 4.13: Un aspect surprenant de ces résultats est qu'aucune donnée initiale sur la vitesse u n'est nécessaire. L'explication apparaîtra ci-dessous: le profil initial de vitesse $u(x, 0)$ peut être calculé à partir des données initiales (4.87). •

Remarque 4.14: Si h n'est pas bornée, l'existence globale de la solution n'est pas assurée: on a seulement existence d'une solution sur un intervalle $[0, t_{max}[$, avec $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|T(., t)\|_\infty = +\infty$ si $t_{max} < +\infty$. •

Remarque 4.15: Les résultats précédents s'étendent sans difficulté aux systèmes décrivant la propagation d'une flamme non adiabatique ou la propagation dans un

mélange dilué d'une flamme entretenue par un mécanisme chimique complexe (nombre quelconque d'espèces et de réactions; voir [33]). •

La démonstration des résultats précédents repose sur l'introduction d'une coordonnée d'espace Lagrangienne: on introduit le changement de variables $(x, t) \rightarrow (\xi, \tau = t)$, où ξ est la coordonnée Lagrangienne classique donnée par:

$$\xi = \int_{x(0,t)}^{x(\xi,t)} \rho(x', t) dx' \quad (4.100)$$

(voir Courant-Friedrichs [18]). On a alors $x_\tau = u$ (qui traduit que ξ est une variable Lagrangienne), $x_\xi = \rho^{-1}$, et $\xi_x = \rho$, $\xi_t = -\rho u$. En utilisant ces relations et en employant des variables normalisées (notamment $\Theta = \frac{T - T_u}{T_b - T_u}$ et $Z = \frac{Y}{Y_u}$ déjà introduites dans la section 3), on obtient la nouvelle forme du problème (4.86)-(4.90) (voir [33] pour le détail des calculs):

$$\begin{cases} \Theta_\tau - \Theta_{\xi\xi} = Zf(\Theta) = \Omega(Z, \Theta) , \\ Z_\tau - \frac{Z_{\xi\xi}}{Le} = -Zf(\Theta) , \end{cases} \quad (4.101)$$

$$\begin{cases} \Theta(\xi, 0) = \Theta_0(\xi) , \quad Z(\xi, 0) = Z_0(\xi) , \\ \Theta(-\infty, \tau) = 0 , \quad \Theta(+\infty, \tau) = 1 , \\ Z(-\infty, \tau) = 1 , \quad Z(+\infty, \tau) = 0 , \end{cases} \quad (4.102)$$

$$(\Theta + \alpha)\rho = 1 , \quad (4.103)$$

$$u_\xi = \Theta_\tau , \quad u(-\infty, \tau) = u_0 , \quad (4.104)$$

$$p_\xi = -u_\tau , \quad p(-\infty, \tau) = 0 , \quad (4.105)$$

pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$; on a posé $\alpha = \frac{T_u}{T_b - T_u} > 0$, et $f(s) = (s + \alpha)h(s)$ à une constante multiplicative près.

L'utilisation de la coordonnée Lagrangienne ξ découple donc le système d'équations à résoudre: il reste essentiellement un système non linéaire de réaction-diffusion (4.101)-(4.102) et un système linéaire (4.103)-(4.105) (ce découplage est aussi utilisé pour la résolution numérique du problème (4.86)-(4.90); voir Larrouturnou [32], [35], Peters-Warnatz [42]).

Le plan d'étude du problème (4.86)-(4.90) est alors le suivant: on considère le problème (4.101)-(4.105) ["formellement équivalent" à (4.86)-(4.90)], et on résoud

d'abord le système (4.101)-(4.102), puis chaque équation (4.103), (4.104) et (4.105) l'une après l'autre. Il restera ensuite à vérifier que cette méthode fournit bien une solution de (4.86)-(4.90), en particulier dans le cas de solutions faibles.

Nous présentons maintenant ces trois étapes (nous renvoyons à [33] pour les démonstrations détaillées):

Etape 1: Système de réaction-diffusion (4.101)-(4.102)

A cause des conditions aux limites non homogènes sur Θ et Z , il est nécessaire pour résoudre (4.101)-(4.102) de poser $\phi = \Theta - \gamma$, $\psi = Z + \gamma - 1$, et $\phi_0 = \Theta_0 - \gamma$, $\psi_0 = Z_0 + \gamma - 1$. On définit aussi $g(y) = y$ si $y \geq 0$, 0 sinon. Le système (4.101)-(4.102) devient alors:

$$\begin{cases} \phi_\tau - \phi_{\xi\xi} = f(\phi + \gamma) g(\psi + 1 - \gamma) + \gamma_{\xi\xi} , \\ \psi_\tau - \frac{\psi_{\xi\xi}}{Le} = -f(\phi + \gamma) g(\psi + 1 - \gamma) - \frac{\gamma_{\xi\xi}}{Le} \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ , \\ \phi(\xi, 0) = \phi_0(\xi) , \psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi) \text{ pour } \xi \in \mathbb{R} , \\ \phi(\pm\infty, \tau) = 0 , \psi(\pm\infty, \tau) = 0 \text{ pour } \tau \in \mathbb{R}_+ . \end{cases} \quad (4.106)$$

Tous les arguments utilisés pour résoudre ce problème sont classiques:

(a) L'opérateur $(\phi, \psi) \in (H^2)^2 \longrightarrow (-\phi_{\xi\xi}, -Le^{-1}\psi_{\xi\xi}) \in (L^2)^2$ étant maximal monotone, on peut utiliser les résultats d'existence et d'unicité provenant de l'application de la théorie des semi-groupes linéaires aux équations aux dérivées partielles non linéaires (voir Brezis [14], Pazy [41]). On considère $U > \|\phi_0\|_\infty + \|\psi_0\|_\infty$, et on remplace dans (4.106) f et g par des fonctions f_U et g_U lipschitziennes sur \mathbb{R} qui coïncident avec f et g sur $[-U, U]$. Le système obtenu a alors une solution globale unique; pour τ assez petit, cette solution satisfait $\|\phi(\cdot, \tau)\|_\infty + \|\psi(\cdot, \tau)\|_\infty < U$, et est donc une solution de (4.106). Ceci démontre l'existence d'une solution unique de (4.106) sur un intervalle $[0, \tau_{max}[$, avec:

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_{max}} \|\phi(\cdot, \tau)\|_\infty + \|\psi(\cdot, \tau)\|_\infty = +\infty \text{ si } \tau_{max} < +\infty . \quad (4.107)$$

Cette solution satisfait $\phi, \psi \in C(\mathbb{R}_+, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2)$, et a une régularité supérieure si les hypothèses du théorème 4.12 sont vérifiées.

(b) On utilise ensuite le principe du maximum pour les équations paraboliques: en revenant aux variables Θ et Z , on vérifie facilement que la solution de (4.106) sur $[0, \tau_{max}[$ satisfait $0 \leq Z \leq 1$ et $0 \leq \Theta$ p.p., et est donc une solution de (4.101)-(4.102).

(c) Il reste à montrer l'existence globale de la solution, c'est-à-dire que $\tau_{max} = +\infty$. Puisque Z est bornée, il suffit de montrer que $\|\Theta(\cdot, \tau)\|_\infty$ ne peut pas "exploser" en temps fini. Pour $p > 1$, on peut multiplier la première équation (4.101) par Θ^{p-1} et intégrer par parties sur \mathbb{R} pour obtenir:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Theta^p \leq p \int_{\mathbb{R}} [Zf(\Theta)\Theta^{p-1}] . \quad (4.108)$$

D'autre part, puisque h est bornée et lipschitzienne au voisinage de 0, la fonction f est sous-linéaire: $\exists C > 0, \forall s > 0, |f(s)| \leq Cs$. On en déduit que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Theta^p \leq Cp \int_{\mathbb{R}} \Theta^p , \quad (4.109)$$

d'où, en utilisant le lemme de Gronwall:

$$\int_{\mathbb{R}} \Theta(\cdot, \tau)^p \leq e^{Cp\tau} \int_{\mathbb{R}} \Theta_0^p . \quad (4.110)$$

On obtient donc $\|\Theta(\cdot, \tau)\|_p \leq e^{Ct} \|\Theta_0\|_p$ et, en prenant la limite $p \rightarrow +\infty$:

$$\|\Theta(\cdot, \tau)\|_\infty \leq e^{Ct} \|\Theta_0\|_\infty , \quad (4.111)$$

ce qui prouve que $\tau_{max} = +\infty$. •

Etape 2: Système linéaire (4.103)-(4.105)

(a) Comme $\Theta + \alpha \geq \alpha > 0$, l'équation (4.103) se résoud immédiatement: $\rho = (\Theta + \alpha)^{-1}$.

(b) L'équation (4.104) donnant la vitesse s'écrit aussi $u_\xi = \Theta_{\xi\xi} + \Omega$. Comme $\phi, \psi \in H^2 \cap L^1$, on a facilement $\Omega \in L^1$, et on obtient:

$$u(\xi, \tau) = u_0 + \Theta_\xi(\xi, \tau) + \int_{-\infty}^{\xi} \Omega(\eta, \tau) d\eta . \quad (4.112)$$

(c) Il est facile de montrer que cette dernière relation peut être dérivée (au sens des distributions) pour donner:

$$u_\tau = \Theta_{\xi\tau} + \int_{-\infty}^{\xi} \Omega_\tau = \Theta_{\xi\xi\xi} + \Omega_\xi + \int_{-\infty}^{\xi} \Omega_\tau , \quad (4.113)$$

avec $\Omega_\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1)$. La solution de (4.105) est alors donnée par:

$$p(\xi, \tau) = -\Theta_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \Omega(\xi, \tau) - \int_{-\infty}^{\xi} [d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \Omega_\tau(\zeta, \tau) d\zeta] , \quad (4.114)$$

où il reste à vérifier que le terme intégral a un sens. Comme $\Omega_\tau = Z_\tau f(\Theta) + Z\Theta_\tau f'(\Theta)$ et que Z est bornée, il suffit de montrer la propriété suivante:

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta < 0, \int_{-\infty}^{\eta} |Z_\tau f(\Theta)| + |\Theta_\tau f'(\Theta)| \leq \frac{1}{|\eta|^{1+\epsilon}} . \quad (4.115)$$

Pour $\tau > 0$, $\Theta \in \mathcal{C}([0, \tau], L^\infty)$; d'après l'hypothèse (4.92), il existe alors une constante $K > 0$ telle que $f'(\Theta) \leq K\Theta^\beta$ sur $\mathbb{R} \times [0, \tau]$. Comme $\Theta_\tau \in \mathcal{C}([0, \tau], L^2)$, il suffit pour estimer $\int_{-\infty}^{\eta} |\Theta_\tau f'(\Theta)|$ de majorer $(\int_{-\infty}^{\eta} \Theta^{2\beta})^{\frac{1}{2}}$. Un raisonnement analogue s'applique pour le terme $\int_{-\infty}^{\eta} |Z_\tau f(\Theta)|$, et il suffit pour démontrer (4.115) de prouver que Θ décroît "assez vite" à l'infini, plus précisément que, pour un certain ν vérifiant $2\beta\nu > 3$, on a $\Theta(\xi, \tau)|\xi|^\nu \in L^\infty(\mathbb{R}_-^*)$. Ceci se déduit de l'hypothèse (4.94) et du lemme suivant:

Lemme 4.16:

Soient $\nu > 0$ et $W_\nu = \{w \in L^2 \cap L^\infty, \max_{\eta \in \mathbb{R}_-^*} |\eta|^\nu w(\eta)| < +\infty\}$, et soit (ϕ, ψ) la solution de (4.106). Si $\phi_0 \in W_\nu$, alors $\phi(\tau) \in W_\nu$ pour tout $\tau \geq 0$. •

La preuve de ce lemme repose sur le résultat plus général suivant pour l'équation de la chaleur homogène, dont la démonstration utilise la formule explicite de la solution à l'aide du noyau de Green:

Lemme 4.17:

Soient $\nu > 0$ et $v_0 \in L^2$. On considère la solution de l'équation de la chaleur $v_\tau - v_{\xi\xi} = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, avec la donnée initiale $v(\xi, 0) = v_0(\xi)$. Si $v_0 \in W_\nu$, alors $v(\tau) \in W_\nu$ pour tout $t \geq 0$. •

Etape 3: Retour au système Eulérien (4.86)-(4.90)

Il faut encore montrer que la solution (Θ, Z, ρ, u, p) de (4.101)-(4.105) permet d'obtenir une solution du problème d'origine (4.86)-(4.90). Cette étape est très simple: même dans le cas d'une solution faible de (4.101)-(4.105), ρ et u ont grâce à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur une régularité suffisante [$\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, C^1)$, $u \in$

$C(\mathbb{R}_+, C)$] pour que le changement de variable (4.100) soit défini et donne une solution de (4.86)-(4.90) au sens des distributions. •

5. EQUATIONS MULTIDIMENSIONNELLES

Nous présentons dans cette cinquième section quelques résultats mathématiques relatifs à l'équation (3.16) qui décrit les solutions stationnaires du système thermo-diffusif multidimensionnel dans le cas où le nombre de Lewis est égal à 1. Nous écrirons désormais cette équation et les conditions aux limites qui lui sont associées sous la forme:

$$\begin{cases} -\Delta T + u(y)T_x = g(T) & \text{dans } S = \mathbb{R} \times \mathcal{O}, \\ T(-\infty, y) = 0, \quad T(+\infty, y) = 1 & \text{pour } y \in \mathcal{O}, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial S = \mathbb{R} \times \partial \mathcal{O}, \end{cases} \quad (5.1)$$

où \mathcal{O} est un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^2 , de frontière régulière $\partial \mathcal{O}$; n désigne la normale unitaire extérieure sur $\mathbb{R} \times \partial \mathcal{O}$. Les fonctions non linéaires u et g sont définies respectivement sur \mathcal{O} et \mathbb{R}_+ , et Δ désigne l'opérateur de Laplace dans le tube tridimensionnel $S = \mathbb{R} \times \mathcal{O}$:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_2^2} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } y = (y_1, y_2) \in \mathcal{O}. \quad (5.2)$$

5.1. Une famille de solutions stationnaires du modèle thermo-diffusif

Suivant les résultats connus pour l'équation monodimensionnelle (4.5) $-T'' + cT' = g(T)$ décrivant une flamme plane stationnaire, nous nous intéressons à une famille de solutions de (5.1) donnée par le système suivant, dans lequel $\alpha(y)$ est une fonction donnée de $y \in \mathcal{O}$ et où les inconnues sont encore $c \in \mathbb{R}$ et $T \in C^2(S)$:

$$-\Delta T + c\alpha(y)T_x = g(T) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathcal{O}, \quad (5.3)$$

$$T(-\infty, y) = 0, \quad T(+\infty, y) = 1 \quad \text{pour } y \in \mathcal{O}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathcal{O}. \quad (5.5)$$

Nous supposons que les fonctions données α et g satisfont les hypothèses suivantes:

$$\alpha \in C(\mathcal{O}, \mathbb{R}) , \quad \min_{y \in \mathcal{O}} \alpha(y) = \alpha_0 > 0 ; \quad (5.6)$$

$$g \in C([0, 1], \mathbb{R}_+) , \quad g(1) = 0 , \quad (5.7)$$

$$\exists \theta \in]0, 1[, \quad g \equiv 0 \text{ sur } [0, \theta] , \quad g > 0 \text{ sur }]\theta, 1[; \quad (5.8)$$

θ désigne encore une température d'ignition.

Le principal résultat de cette section est le suivant:

Théorème 5.1: [7]

Sous les hypothèses (5.6)-(5.8), il existe une solution (c, T) du problème (5.3)-(5.5), qui satisfait $T \in C^2(\bar{S})$, $0 < T < 1$ dans \bar{S} et $c > 0$. •

Nous donnons ci-dessous une idée de la démonstration; le lecteur est renvoyé à Berestycki et Larrouturou [7] pour les détails; quelques propriétés qualitatives des solutions de (5.3)-(5.5) seront présentées dans la section 5.2.

Etape 1: Problème sur un domaine borné

Nous considérons d'abord un problème analogue à (5.3)-(5.5) posé sur un domaine borné. Pour $a > 0$, on pose $S_a = \{(x, y) \in S, -a < x < ka\}$, où $k > 0$ est un paramètre dont la valeur sera fixée par la suite, et on considère le problème:

$$-\Delta T + c\alpha(y)T_x = g(T) \text{ dans } S_a , \quad (5.9)$$

$$T(-a, y) = 0 , \quad T(ka, y) = 1 \text{ pour } y \in \mathcal{O} , \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x, y) = 0 \text{ pour } -a < x < ka \text{ et } y \in \partial \mathcal{O} , \quad (5.11)$$

$$\max_{(x, y) \in S_a^-} T(x, y) = \theta , \quad (5.12)$$

où les inconnues sont encore c et T . Dans la condition (5.12), on a noté S_a^- le cylindre $\{(x, y) \in S_a, x < 0\}$; cette condition est liée à l'invariance par translation des solutions de (5.3)-(5.5) et permet de garder c inconnu dans (5.9)-(5.12). En effet, pour tout $c > 0$, il existe une solution T de (5.9)-(5.11), obtenue aisément en utilisant le théorème de point fixe de Schauder; mais si c n'est pas fixé de façon adéquate, cette solution sur S_a ne converge pas, lorsque $a \rightarrow +\infty$, vers une solution de (5.3)-(5.5).

Nous allons montrer l'existence d'une solution de (5.9)-(5.12) sur S_a , puis résoudre le problème (5.3)-(5.5) en étudiant le passage à la limite $a \rightarrow +\infty$. •

On supposera dans toute la suite que les hypothèses (5.6)-(5.8) sont satisfaites.

Etape 2: Estimations a priori

Commençons en montrant quelques estimations a priori pour une solution (c, T) de (5.9)-(5.12). Par le principe du maximum, on a facilement:

$$0 < T < 1 \text{ dans } S_a, \quad \max_{y \in O} T(0, y) = \theta. \quad (5.13)$$

Le point crucial est l'obtention d'estimations sur c ; en effet, une fois c borné, les estimations elliptiques classiques montrent que T est borné dans $W^{2,p}(S_a)$. Commençons avec l'estimation supérieure sur c :

Lemme 5.2:

Soit (c, T) une solution de (5.9)-(5.12) dans S_a . Il existe K (indépendant de a) tel que, pour tout $a > 1$:

$$c < K. \bullet \quad (5.14)$$

Preuve: Soit $M = \max_{0 \leq s \leq 1} g(s)$, et soit $H(x)$ la fonction de Heavyside. Considérons la fonction w donnée par:

$$\begin{cases} -w'' + c\alpha_0 w' = MH(x) & \text{pour } x \in]-a, ka[, \\ w(-a) = 0, \quad w(ka) = 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

On déduit facilement du principe du maximum que $T(x, y) \leq w(x)$ pour $(x, y) \in S_a$. On a donc $w(0) \geq \theta$. En écrivant explicitement la valeur de $w(0)$, on obtient la majoration (5.14). •

Un argument semblable basé sur le principe du maximum montre que, si $c \geq 0$:

$$T(x, y) \leq \theta \frac{e^{c\alpha_0 x} - e^{-c\alpha_0 a}}{1 - e^{-c\alpha_0 a}} \text{ pour } (x, y) \in S_a^-. \quad (5.16)$$

Nous pouvons alors démontrer l'estimation inférieure suivante sur c :

Lemme 5.3:

On suppose que k satisfait $(1+k)^{-1} > \theta$. Soit (c, T) une solution de (5.9)-(5.12) dans S_a . Il existe $a_0 \geq 1$ et une constante $\delta > 0$ (indépendante de a) tels que, si $a \geq a_0$, on a:

$$c > \delta > 0 . \bullet \quad (5.17)$$

Preuve: En utilisant encore le principe du maximum, on peut montrer que l'hypothèse $(1+k)^{-1} > \theta$ implique $c > 0$. En combinant les deux identités intégrales obtenues en multipliant successivement l'équation (5.9) par $(1-T)$ et T_x , on peut écrire:

$$mes(O) \int_0^1 g(s) ds \leq \frac{1}{2} \int_O T_x^2(-a, y) dy + c\beta_1 \int_O T_x(-a, y) dy + \beta_2 c^2 , \quad (5.18)$$

où β_1 et β_2 sont des constantes positives. Comme (5.16) implique:

$$T_x(-a, y) \leq \frac{\theta}{a} \quad \forall y \in O , \quad (5.19)$$

on en déduit (5.17). \bullet

Etape 3: Résolution sur S_a

On a le résultat suivant:

Proposition 5.4:

Soient $a > 0$ et $k > 0$ fixés. Le problème (5.9)-(5.12) a au moins une solution. \bullet

Preuve: Pour résoudre le système (5.9)-(5.12), on l'écrit sous forme d'un problème de point fixe $X = F(X)$. L'opérateur F est défini dans l'espace $E = \mathbb{R} \times C^1(\bar{S}_a)$ par:

$$F(c, T) = (\max_{(x,y) \in S_a^-} T(x, y) - \theta + c, \tau(c, T)) , \quad (5.20)$$

où $\tau = \tau(c, T)$ vérifie les conditions aux limites (5.10)-(5.11) et l'équation:

$$-\Delta \tau + c\alpha(y)\tau_x = g(T) \quad \text{dans } S_a \quad (5.21)$$

(g est prolongée par 0 en dehors de $[0, 1]$).

L'existence d'un point fixe de F est obtenue en utilisant le degré topologique de Leray et Schauder. Pour $\tau \in [0, 1]$, soit F_τ l'opérateur obtenu en remplaçant g par τg et $\alpha(y)$ par $\tau\alpha(y) + (1-\tau)\alpha_0$ dans (5.21) ($F_1 = F$); F_τ est un opérateur compact de E

dans E . En utilisant des estimations a priori (analogues à celles démontrées à l'étape précédente) pour les solutions de l'équation $F_\tau(X) = X$, on peut construire un ouvert Ω de la forme

$$\Omega = \{(c, T) \in E, \quad c_1 < c < c_2, \quad \|T\|_{C^1} < K\}, \quad (5.22)$$

tel que le degré $d(Id - F_\tau, \Omega, 0)$ soit bien défini pour tout $\tau \in [0, 1]$. Ce degré est alors indépendant de τ et peut être évalué en explicitant l'opérateur F_0 ; en effet, l'opérateur F_0 est de la forme:

$$F_0(c, T) = \left(\max_{(x, y) \in S_a^-} T(x, y) - \theta + c, \quad \tau_c \right), \quad (5.23)$$

où τ_c ne dépend plus de T . En utilisant un autre argument d'homotopie, on peut montrer que le degré $d(Id - F_0, \Omega, 0)$ est égal à $d(h,]c_1, c_2[, 0)$, où h est la fonction définie par $h(c) = \max_{-a \leq x \leq 0} \tau_c - \theta + c$. Il suffit alors de montrer que h est une fonction strictement décroissante pour obtenir:

$$d(Id - F_0, \Omega, 0) = d(Id - F, \Omega, 0) = -1, \quad (5.24)$$

ce qui montre l'existence d'un point fixe de F , i.e. d'une solution de (5.9)-(5.12). •

Etape 4: Passage à la limite $a \rightarrow +\infty$

Nous supposons désormais que $(1+k)^{-1} > \theta$. Soit (a_n) une suite de réels positifs vérifiant $\lim a_n = +\infty$, et soit (c_n, T_n) une solution de (5.9)-(5.12) sur S_{a_n} . Les estimations a priori sur la suite (c_n, T_n) permettent d'extraire une sous-suite (que nous notons encore (c_n, T_n)) telle que $c_n \rightarrow c > 0$ et $T_n \rightarrow T$ localement, c et T vérifiant les propriétés (5.3), (5.4) et $c > 0$, $0 \leq T \leq 1$, $\max_{y \in O} T(0, y) = \theta$. Dans la fin de cette section, (c, T) désignera toujours la limite de la suite (c_n, T_n) .

En passant à la limite lorsque $a \rightarrow +\infty$ dans (5.16), on obtient:

$$T(x, y) \leq \theta e^{c\alpha_0 x} \quad \text{pour } x \leq 0, \quad (5.25)$$

ce qui implique $T(-\infty, y) = 0$. Pour montrer que (c, T) est bien solution de (5.3)-(5.5), il reste donc à étudier la limite $T(+\infty, y)$. Commençons par le lemme suivant:

Lemme 5.5:

Les intégrales suivantes sont finies:

$$\int_S g(T) < +\infty, \quad \int_S \nabla T^2 < +\infty. \quad (5.26)$$

Preuve: Sur $\mathbb{R}_- \times \mathcal{O}$, on a $g(T) \equiv 0$ puisque $T \leq \theta$. D'autre part, pour $z > 0$, on pose $Q_z =]0, z[\times \mathcal{O}$ et $U(z) = \int_{\mathcal{O}} T(z, y) dy$. En intégrant l'équation (5.3) sur Q_z , on a $\int_{Q_z} g(T) = A(z) - A(0)$, avec $A(z) = c \int_{\mathcal{O}} \alpha(y) T(z, y) dy - U'(z)$. Si $\int_{Q_z} g(T) \rightarrow +\infty$ lorsque $z \rightarrow +\infty$, alors $U'(+\infty) = -\infty$, ce qui est impossible puisque U est bornée. Pour la deuxième intégrale, on multiplie l'équation (5.3) par T avant d'intégrer sur Q_z , et on conclut de la même façon. •

Pour $z \in \mathbb{R}$, soit maintenant R_z le cylindre $]z, z+1[\times \mathcal{O}$. Pour étudier la limite $T(+\infty, y)$, nous allons considérer la suite des fonctions T_m définies sur R_0 par:

$$T_m(x, y) = T(x + m, y), \quad (5.27)$$

pour $(x, y) \in R_0$ et $m \in \mathbb{N}$. Comme T_m satisfait l'équation (5.3) sur R_0 , on peut utiliser les estimations elliptiques classiques pour extraire une sous-suite (T_{m_k}) convergeant vers une limite T_0 dans $\mathcal{C}^1(\bar{R}_0)$. Si on choisit la suite extraite (m_k) telle que les cylindres R_{m_k} soient disjoints, le lemme 5.5 implique que les séries de terme général $\int_{R_0} g(T_{m_k})$ et $\int_{R_0} \nabla T_{m_k}^2$ convergent. On a donc $g(T_0) = \nabla T_0 = 0$: T_0 est une constante l , et $l \in [0, \theta] \cup \{1\}$ d'après (5.8).

Il reste à montrer que $l = 1$. Un raisonnement analogue au précédent montre qu'on peut choisir la suite extraite (m_k) telle que la suite (T_{-m_k}) (définie en étendant (5.27) aux entiers négatifs) converge vers 0 dans $\mathcal{C}^1(\bar{R}_0)$. En intégrant sur $] -m_k, m_k[\times \mathcal{O}$ l'équation (5.3) multipliée par T_x , on obtient une relation dont on peut prendre la limite lorsque $m_k \rightarrow +\infty$ pour obtenir:

$$c \int_S \alpha(y) T_x^2 = \text{mes}(\mathcal{O}) \int_0^l g(s) ds. \quad (5.28)$$

Le membre de gauche de cette égalité est strictement positif car $c > 0$, $\alpha(y) \geq \alpha_0 > 0$ et $\max_{y \in \mathcal{O}} T(0, y) = \theta \neq T(-\infty, y)$. On a donc $l = 1$ d'après (5.8). Un argument de contradiction classique montre ensuite que toute la suite (T_m) tend vers 1 et permet de conclure: $T(+\infty, y) = 1$, et (c, T) vérifie (5.3)-(5.5). •

5.2. Propriétés qualitatives

Nous indiquons maintenant quelques résultats qualitatifs obtenus par H. Berestycki et L. Nirenberg [11], [12] pour les problèmes du type (5.3)-(5.5); les deux résultats principaux sont les suivants:

Théorème 5.6: [11]

Soit (c, T) une solution du problème (5.3)-(5.5). Alors $T_x > 0$ dans \bar{S} . •

Théorème 5.7: [12]

La solution (c, T) de (5.3)-(5.5) est unique: si (c_1, T_1) et (c_2, T_2) sont deux solutions de (5.3)-(5.5), alors $c_1 = c_2$ et $\exists X \in \mathbb{R}$, $T_1(x, y) = T_2(x + X, y)$. •

Nous n'évoquerons ici que le résultat relatif à la monotonie. Le résultat d'unicité est détaillé dans [12] (voir également Berestycki et al [9]).

Les résultats de monotonie de H. Berestycki et L. Nirenberg [11], ainsi que d'autres types de propriétés qualitatives pour les solutions de problèmes elliptiques semi-linéaires dans des domaines cylindriques finis ou infinis, sont obtenus dans un cadre plus général que nous décrivons à présent. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ un domaine borné non vide de frontière régulière $\partial\Omega$, et $\Sigma = \mathbb{R} \times \Omega$. Soient $\gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On désigne par ν la normale extérieure unitaire sur $\partial\Omega$ et on suppose que les fonctions γ et h vérifient:

$$\gamma > 0 \text{ sur } \bar{\Omega}, \quad (5.29)$$

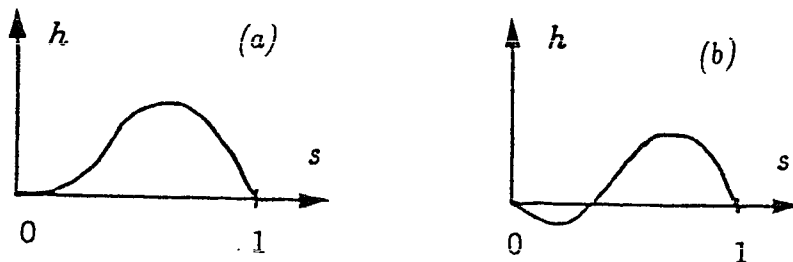
$$h(y, 0) = h(y, 1) = 0 \text{ pour } y \in \bar{\Omega}, \quad (5.30)$$

$$\begin{cases} h = h(y, s) \text{ admet une dérivée continue } h_s(y, s) \\ \text{au voisinage de } s = 0 \text{ et } s = 1, \end{cases} \quad (5.31)$$

$$h_s(y, 0) \leq 0, \quad h_s(y, 1) < 0, \quad \forall y \in \bar{\Omega}. \quad (5.32)$$

Donc, la fonction $s \rightarrow h(y, s)$ (pour y fixé) est de l'un des deux types suivants:

Figure 1: Les deux types de nonlinéarités $s \rightarrow h(y, s)$.



Le cas (a) est celui qui apparaît en combustion alors que le cas (b) intervient dans des modèles de biologie (voir Aronson-Weinberger [2], Fife [20], [21]). On considère le

problème suivant:

$$-\Delta u + \gamma(y)u_x = h(y, u) \text{ dans } \Sigma = \mathbb{R} \times \Omega, \quad (5.33)$$

$$u(-\infty, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 1 \text{ pour } y \in \bar{\Omega}, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial \Sigma = \mathbb{R} \times \partial \Omega. \quad (5.35)$$

Le résultat principal (dont le Théorème 5.6 ci-dessus est un cas particulier) est le suivant:

Théorème 5.8: [11]

On suppose que les fonctions γ et h sont continues et vérifient (5.29)-(5.32). Soit u une solution de (5.33)-(5.35). Si $0 < u < 1$ dans $\bar{\Sigma}$, alors $u_x > 0$ dans $\bar{\Sigma}$. •

Nous divisons encore la démonstration en plusieurs étapes que nous décrivons brièvement. Elle est inspirée de l'article classique de B. Gidas, W. Ni et L. Nirenberg [22] et repose sur le principe du maximum et une méthode de déplacement d'hyperplans perpendiculaires à l'axe des x .

Etape 1: Solution exponentielles asymptotiques

On note $a(y) = -h_s(y, 0)$, $b(y) = -h_s(y, 1)$; donc, $a \geq 0$ et $b > 0$ dans Ω . Les équations linéarisées lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$ sont respectivement de la forme:

$$-\Delta u + \gamma(y)u_x + a(y)u = 0, \quad (5.36)$$

et:

$$-\Delta u + \gamma(y)u_x - b(y)(1 - u) = 0. \quad (5.37)$$

Les solutions exponentielles $u = e^{\lambda x}\phi(y)$ et $u = 1 - e^{\mu x}\psi(y)$ de (5.36) et (5.37) respectivement sont donc obtenues par la résolution des problèmes suivants dans Ω :

$$\begin{cases} -\Delta_y \phi + a(y)\phi = (\lambda^2 - \lambda\gamma(y))\phi & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (5.38)$$

et:

$$\begin{cases} -\Delta_y \psi + b(y)\psi = (\mu^2 - \mu\gamma(y))\psi & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (5.39)$$

Ces équations sont linéaires en ϕ et ψ mais non linéaires en λ et μ . On n'envisage que les "valeurs propres" $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ respectivement. Pour les "valeurs propres principales", on peut établir les faits suivants (voir [11] pour la démonstration):

Proposition 5.9:

Soient a et b des fonctions continues telles que $a \geq 0$ et $b > 0$ dans $\bar{\Omega}$. Il existe une valeur propre *positive* (resp.: *négative*) unique $\lambda > 0$ (resp.: $\mu < 0$) de (5.38) (resp.: (5.39)) correspondant à une fonction propre $\phi > 0$ (resp. $\psi > 0$). De plus, λ est la plus petite "valeur propre" positive (resp.: μ est la plus grande "valeur propre" négative), et λ (resp.: μ) est une "valeur propre simple". •

Remarque 5.10: On montre également dans [11] que (5.38) (resp.: (5.39)) admet une suite de valeurs propres positives croissantes $\lambda_n \rightarrow +\infty$ (resp.: négatives décroissantes $\mu_n \rightarrow -\infty$), avec $\lambda_1 = \lambda$ (resp.: $\mu_1 = \mu$). Lorsque $\Omega =]0, 1[$, on peut montrer que l'espace propre correspondant à λ_n (resp.: μ_n) est de dimension 1 et formé de fonctions qui s'annulent exactement $n - 1$ fois dans $]0, 1[$. On a donc pour ces problèmes l'analogie de la théorie de Sturm-Liouville. •

Etape 2: Comportement asymptotique

Des résultats très généraux de S. Agmon et L. Nirenberg [1] et une extension non linéaire de A. Pazy [40] décrivent le comportement asymptotique d'équations paraboliques ou d'équations elliptiques dans un cylindre infini. A l'aide de ces résultats on obtient le comportement asymptotique d'une solution u de (5.33)-(5.35) (nous renvoyons à [11] pour les détails):

Proposition 5.11:

On suppose que γ et h vérifient les conditions (5.29)-(5.32). Soit u une solution du problème (5.33)-(5.35) vérifiant $0 < u < 1$ dans $\bar{\Sigma}$. Soient λ et μ les valeurs propres principales de (5.38) et (5.39) avec $\lambda > 0$, $\mu < 0$, et ϕ et ψ des fonctions propres associées à λ et μ respectivement. Alors il existe des constantes $k_- > 0$ et $k_+ > 0$ telles que:

$$\begin{cases} u(x, y) = k_- e^{\lambda x} \phi(y) + o(e^{\lambda x}), \\ u_x(x, y) = \lambda k_- e^{\lambda x} \phi(y) + o(e^{\lambda x}) \end{cases} \text{ lorsque } x \rightarrow -\infty, \quad (5.40)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = 1 - k_+ e^{\mu x} \psi(y) + o(e^{\mu x}), \\ u_x(x, y) = -\mu k_+ e^{\mu x} \psi(y) + o(e^{\mu x}) \end{cases} \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty. \bullet \quad (5.41)$$

Etape 3: Déplacement des hyperplans et conclusion

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons maintenant:

$$\Sigma_\lambda = \{(x, y) \in \Sigma, \ x < \lambda\}, \quad (5.42)$$

$$H_\lambda = \{(x, y) \in \Sigma, \ x = \lambda\}, \quad (5.43)$$

$$w_\lambda(x, y) = u(2\lambda - x, y) - u(x, y). \quad (5.44)$$

La proposition précédente permet de voir que pour λ voisin de $-\infty$, $u_x > 0$ et $w_\lambda > 0$ dans Σ_λ . On pose:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \lambda' < \lambda, \ u_x > 0 \text{ et } w_{\lambda'} > 0 \text{ dans } \Sigma_{\lambda'}\}; \quad (5.45)$$

Λ contient donc un voisinage de $-\infty$. D'autre part, la fonction $v(x, y) = u(2\lambda - x, y)$ vérifie:

$$-\Delta v - \gamma(y)v_x = h(y, v) \text{ dans } \Sigma_\lambda. \quad (5.46)$$

Posons aussi:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{cases} \frac{h(y, v(x, y)) - h(y, u(x, y))}{v(x, y) - u(x, y)} & \text{si } v(x, y) - u(x, y) \neq 0, \\ h_s(y, u(x, y)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.47)$$

Cette fonction est continue. On obtient donc (en posant $w = w_\lambda = v - u$):

$$-\Delta w - \gamma(y)w_x - \mathcal{H}(x, y)w = 2\gamma(y)u_x \text{ dans } \Sigma_\lambda. \quad (5.48)$$

Soit $\lambda \in \bar{\Lambda}$; alors $u_x > 0$ dans Σ_λ , d'où:

$$-\Delta w - \gamma(y)w_x - \mathcal{H}(x, y)w \geq 0 \text{ dans } \bar{\Sigma}_\lambda. \quad (5.49)$$

Comme $w \geq 0$ dans Σ_λ et $w = 0$ sur H_λ , on en déduit (voir Gidas et al [22]):

$$w_x < 0 \text{ sur } H_\lambda, \quad (5.50)$$

d'où, puisque sur H_λ , $w_x = -2u_x$:

$$u_x > 0 \text{ sur } H_\lambda. \quad (5.51)$$

En examinant les points de $\bar{H}_\lambda \cap \partial\Sigma$, on peut même préciser:

$$u_x > 0 \text{ sur } \bar{H}_\lambda, \ \forall \lambda \in \bar{\Lambda}. \quad (5.52)$$

En raisonnant par l'absurde, on peut montrer, en particulier en faisant intervenir (5.52), que si $\lambda \in \bar{\Lambda}$, alors $\lambda + \epsilon \in \Lambda$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. Cela prouve que $\sup \Lambda = +\infty$ et donc que $u_x > 0$ dans $\bar{\Sigma}$. •

5.3. Etude asymptotique pour les hautes énergies d'activation

Revenons au problème (5.3)-(5.5) issu du modèle thermo-diffusif. On supposera dans cette section que O est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Comme dans la section 4.3, on suppose maintenant que g dépend d'un paramètre $\epsilon > 0$, proportionnel à l'inverse de l'énergie d'activation. On adopte les hypothèses générales suivantes sur le comportement de g_ϵ :

$$g_\epsilon \in C([0, 1], \mathbb{R}_+) , \quad (5.53)$$

$$g_\epsilon \equiv 0 \text{ sur } [0, \theta] , \quad g_\epsilon(1) = 0 , \quad g'_\epsilon(1) < 0 , \quad (5.54)$$

$$\forall \delta > 0, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\max_{0 \leq s \leq 1-\delta} g_\epsilon(s) \right] = 0 , \quad (5.55)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 g_\epsilon(s) ds = m > 0 . \quad (5.56)$$

On notera dans la suite (c_ϵ, T_ϵ) l'unique solution de (5.3)-(5.5) associée au terme de réaction g_ϵ et vérifiant la condition de normalisation:

$$\max_{y \in O} T_\epsilon(0, y) = \theta . \quad (5.57)$$

Les conditions (5.53)-(5.56) sont plus générales que les hypothèses (4.19)-(4.23) retenues pour l'étude asymptotique du système en dimension 1 (voir section 4.3). Cependant, l'étude de la limite singulière du problème (5.3)-(5.5) lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ est beaucoup plus délicate en dimension supérieure et conduit en particulier à un problème de frontière libre d'un type nouveau. Nous nous bornerons à citer un résultat de H. Berestycki et L. Nirenberg en renvoyant à [12] pour la démonstration.

Théorème 5.12: [12]

Soit (ϵ_n) une suite de réels positifs tendant vers 0. Sous les hypothèses (5.53)-(5.56), on peut extraire une sous-suite (encore notée ϵ_n) telle que les solutions $(c_{\epsilon_n}, T_{\epsilon_n})$ de (5.3)-(5.5) et (5.57) correspondant à g_{ϵ_n} vérifient les propriétés suivantes:

$$c_{\epsilon_n} \rightarrow c \text{ avec } 0 < c < +\infty , \quad (5.58)$$

$$T_{\epsilon_n} \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{C}(\bar{S}) \cap H_{loc}^1(S) . \quad (5.59)$$

La limite T est continue dans \bar{S} , croissante (au sens large) dans la direction x , et vérifie $T(-\infty, y) = 0$ pour $y \in \mathcal{O}$, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ sur $\partial S = \mathbb{R} \times \partial \mathcal{O}$. De plus:

$$\exists \bar{x} > 0, \quad x \geq \bar{x} \implies T(x, y) = 1 . \quad (5.60)$$

En notant $S^- = \{(x, y) \in S, u(x, y) < 1\}$ et $\Gamma = \partial S^- \cap S$, on a aussi:

$$\Gamma \subset \{(x, y) \in S, \quad 0 < x \leq \bar{x}\} , \quad (5.61)$$

$$-\Delta T + c\alpha(y)T_x = 0 \text{ dans } S^- . \quad (5.62)$$

De plus, si l'on suppose que Γ est régulière (C^1 par morceaux), en notant T^- la restriction de T sur S^- et ν la normale unitaire extérieure à S^- sur Γ , on a:

$$\frac{\partial T^-}{\partial \nu} = \sqrt{2m} \text{ sur } \Gamma . \bullet \quad (5.63)$$

Comme on le voit, la limite (c, T) est solution d'un problème de frontière libre (à savoir Γ) qui s'écrit:

$$-\Delta T + c\alpha(y)T_x = 0 \text{ dans } S^- , \quad (5.64)$$

$$T(-\infty, y) = 0 \text{ pour } y \in \mathcal{O} , \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial S \cap \partial S^- , \quad (5.66)$$

$$T = 1 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial \nu} = \sqrt{2m} \text{ sur } \Gamma . \quad (5.67)$$

Sans faire l'hypothèse de régularité sur Γ , une *formulation faible* de ce problème (en particulier de la condition (5.63)) est indiquée dans [12]; la limite (c, T) vérifie toujours cette formulation faible.

Enfin, signalons que les questions de régularité de la frontière libre, d'unicité de la solution (c, T) du problème (5.64)-(5.67) et, partant, de la convergence globale des solutions (c_ϵ, T_ϵ) vers la limite (c, T) sont étudiées dans un travail en cours de H. Berestycki, L. Caffarelli et L. Nirenberg [6].

5.4. Une autre famille de solutions stationnaires

On considère dans cette section une autre famille de solutions du problème (5.1), qui correspond à un champ de vitesses $u(y)$ donné par $u(y) = c + \alpha(y)$ où $\alpha(y)$ est un profil donné et $c \in \mathbb{R}$ est un paramètre à ajuster. Ce problème s'écrit donc:

$$-\Delta T + (c + \alpha(y))T_x = g(T) \quad \text{dans } S = \mathbb{R} \times \mathcal{O}, \quad (5.68)$$

$$T(-\infty, y) = 0, \quad T(+\infty, y) = 1 \quad \text{pour } y \in \mathcal{O}, \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathcal{O}. \quad (5.70)$$

Les solutions de ce problème fournissent des solutions stationnaires du modèle thermo-diffusif (3.16) comme nous l'avons indiqué à propos du problème (5.1). Mais en outre, les solutions de (5.68)-(5.70) correspondent aux solutions d'ondes progressives du modèle thermo-diffusif instationnaire (3.12) lorsque $Le = 1$ et que le champ de vitesse est donné, égal à $\alpha(y)$ (voir l'étude de ce problème par H. Berestycki et B. Larrouturou dans [7]).

Un premier résultat d'existence de solutions de ce problème a été obtenu dans [7] sous une condition exprimant que α "n'oscille pas trop" (et sous les hypothèses (5.6)-(5.8)). On obtient alors des solutions qui vérifient $c + \alpha(y) > 0$ pour tout $y \in \mathcal{O}$. Dans ce cas, d'ailleurs, tous les résultats qualitatifs indiqués dans la section 5.2 ci-dessus restent vrais: la solution est monotone dans la direction x ($T_x > 0$) et (c, T) est déterminé de façon unique (au sens du Théorème 5.7 ci-dessus). L'existence d'une solution est obtenue dans ce cas en calquant la démarche présentée dans la section 5.1.

Dans un travail en cours de H. Berestycki, B. Larrouturou et P.L. Lions [8], on obtient l'existence d'une solution (c, T) de (5.68)-(5.70) pour toute fonction continue $\alpha(y)$. La démonstration requiert plusieurs ingrédients nouveaux par rapport à la section 5.1. Une des difficultés rencontrée ici est liée au fait que l'on ne sait pas a priori si les solutions ont nécessairement un profil monotone. Cette difficulté est surmontée en résolvant un problème modifié:

$$-\Delta T + (c + \alpha(y))|T_x| = g(T) \quad \text{dans } S, \quad (5.71)$$

avec les mêmes conditions aux limites (5.69)-(5.70). On construit une solution de ce problème qui vérifie $0 < T < 1$ dans S . Par un résultat de H. Berestycki et L. Nirenberg

[11], on sait alors que *toute* solution du problème modifié (5.69)-(5.71) vérifie $T_x > 0$ (ce fait découle essentiellement de ce que le terme $|T_x|$ est invariant par la réflexion $T(x, y) \rightarrow T(2\lambda - x, y)$).

Nous renvoyons le lecteur à [8] pour la description complète de la démonstration.

Par construction, les solutions de (5.68)-(5.70) obtenues dans [8] vérifient donc $T_x > 0$. Cependant, la question de savoir si *toutes* les solutions de (5.68)-(5.70) vérifient $T_x > 0$ est encore ouverte. Le résultat d'unicité du Théorème 5.7 est encore valable pour ce problème à condition de n'envisager que les solutions monotones (i.e. vérifiant $T_x > 0$).

Les solutions de (5.68)-(5.70) obtenues dans [8] satisfont l'égalité $c + \tilde{\alpha} > 0$, où $\tilde{\alpha}$ désigne la moyenne de α sur O . Cependant, pour certaines fonctions α , on n'a plus $c + \alpha(y) > 0$ pour tout $y \in O$. Ce type de solutions avait été prédit par des essais numériques de F. Benkhaldoun et B. Larroturou [5]; on obtient donc des solutions stationnaires du modèle thermo-diffusif avec un champ de vitesse $u(y) = c + \alpha(y)$ qui change de signe dans O .

6. REMARQUES ET PROBLEMES OUVERTS

Pour conclure le panorama présenté ci-dessus des études mathématiques relatives aux équations décrivant la propagation des flammes prémélangées, nous formulons ci-dessous quelques remarques et indiquons plusieurs problèmes ouverts dans le prolongement de ces études.

6.1 A partir du système d'équations assez général (2.16), on n'a cessé, comme le lecteur l'aura remarqué, d'introduire des simplifications et approximations successives, pour aboutir dans un cadre monodimensionnel puis multidimensionnel à des modèles que l'on a pu étudier de façon rigoureuse. A ce propos, il convient d'abord de préciser que toutes ces approximations sont "raisonnables" et même classiques; elles sont couramment utilisées par les physiciens. Il faut ensuite remarquer que tous les modèles mathématiques étudiés dans les deux sections précédentes ont en commun de présenter un *découplage* entre les équations décrivant le comportement des "variables de combustion" T et Y d'une part et celles qui concernent les variables hydrodynamiques ρ, \vec{v}, p d'autre part. Ce découplage existe dans le modèle isobare (3.2) dans

un cadre monodimensionnel, stationnaire ou instationnaire; il a été introduit dans un cadre multidimensionnel au prix d'une approximation supplémentaire, celle de la densité constante. Cependant, le couplage non linéaire entre les effets réactifs et diffusifs et les effets hydrodynamiques existe bien sûr dans la réalité, et apparaît dans les modèles compressibles (2.14) ou (2.16) et dans le modèle isobare multidimensionnel (3.2). L'étude mathématique de ces problèmes plus complexes que ceux que l'on a considérés dans les sections 4 et 5 n'a pas encore été réalisée. Rappelons toutefois que des travaux de A. Majda [36] conduisent à un système reposant sur des approximations différentes et dans lequel le couplage combustion - hydrodynamique apparaît; ce modèle a été résolu du point de vue mathématique par P. Embid [19], en utilisant des techniques ressortissant plutôt à celles employées pour les équations de Navier-Stokes (voir par exemple Temam [46]).

6.2 Dans le prolongement des résultats de la section 4, on peut citer plusieurs problèmes ouverts, qui concernent:

- (i) l'unicité de la solution du système (4.1)-(4.2) lorsque $\Lambda^{-1} = Le < 1$,
- (ii) l'étude du comportement asymptotique de la solution du système (4.25)-(4.26) sous les hypothèses (4.3), (4.4), (4.21) et (4.24) (voir Remarque 4.6),
- (iii) l'existence globale de la solution du problème instationnaire (4.86)-(4.90) lorsque l'on ne suppose plus comme dans les théorèmes 4.11 et 4.12 que la fonction non linéaire h est bornée,
- (iv) le comportement asymptotique des solutions instationnaires pour les grandes valeurs du temps ($t \rightarrow +\infty$).

Quittant le domaine de la combustion il pourrait aussi être intéressant d'étudier le système (4.1)-(4.2) décrivant des fronts d'onde plane avec des hypothèses plus générales sur le terme non linéaire $f(T)$ (voir Aronson-Weinberger [2], Fife [20], [21]).

6.3 Dans un cadre multidimensionnel, les questions non résolues abondent puisque seule une première série de résultats concernant un modèle réduit à une seule équation aux dérivées partielles a été obtenue.

Il serait bien sûr intéressant d'étudier les problèmes (5.3)-(5.5) et (5.68)-(5.70) sans supposer l'existence d'une température d'ignition, ou d'étudier l'unicité et la monotonie de la solution du problème (5.68)-(5.70). Mais un progrès plus intéressant pour la

compréhension du fonctionnement mathématique des modèles de combustion peut être attendu de l'étude du *système* thermo-diffusif stationnaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta T + u(y)T_x = Yf(T) , \\ -\frac{\Delta Y}{Le} + u(y)Y_x = -Yf(T) \text{ sur } S , \\ T(-\infty, y) = 0 , \quad T(+\infty, y) = 1 , \\ Y(-\infty, y) = 1 , \quad Y(+\infty, y) = 0 \text{ pour } y \in O , \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial S , \end{array} \right. \quad (6.1)$$

pour $Le \neq 1$ (en cherchant par exemple $u(y)$ sous la forme $c\alpha(y)$ ou $c + \alpha(y)$ avec c inconnu et α donnée).

En effet, on peut s'attendre à ce que les solutions du système (6.1) et celles du problème (5.3)-(5.5) (équivalent à (6.1) lorsque $Le = 1$) présentent quelques propriétés qualitatives différentes (ce point explique d'ailleurs les difficultés supplémentaires rencontrées dans l'étude du système). En particulier, il est intuitivement évident d'un point de vue physique, et facile à vérifier rigoureusement en utilisant le principe du maximum, qu'une solution du système (6.1) vérifie les inégalités:

$$0 \leq Y \leq 1 , \quad 0 \leq T \text{ dans } S . \quad (6.2)$$

Mais il n'est plus possible quand $Le \neq 1$ de montrer que cette solution vérifie l'inégalité $T \leq 1$, et il semble difficile de trouver (rigoureusement ou de façon heuristique) une estimation a priori du type $T \leq T_0$. Les études formelles des physiciens et les études numériques montrent d'ailleurs que la température T peut effectivement dépasser 1 lorsque $Le \neq 1$ (voir par exemple Guillard et al [24], Larrouturnou [34], Sivashinsky [44]). La solution n'est alors plus monotone croissante dans la direction x .

Une autre différence prévisible entre le système (6.1) et l'équation (5.3)-(5.5) concerne l'unicité de la solution. Pour faire apparaître cette différence, considérons le cas où le champ de vitesse $u(y)$ est constant. Le résultat d'unicité du Theorème 5.7 s'interprète alors de la façon suivante:

Corollaire 6.1:

On suppose que les hypothèses (5.6)-(5.8) sont vérifiées. Lorsque $Le = 1$, le

système:

$$\begin{cases} -\Delta T + cT_x = Yf(T) , \\ -\frac{\Delta Y}{Le} + cY_x = -Yf(T) \text{ sur } S , \\ T(-\infty, y) = 0 , \quad T(+\infty, y) = 1 , \\ Y(-\infty, y) = 1 , \quad Y(+\infty, y) = 0 \text{ pour } y \in \mathcal{O} , \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 , \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial S , \\ T(0, 0) = \theta , \end{cases} \quad (6.3)$$

a une solution unique $(c, T(x, y), Y(x, y))$. Cette solution est plane: $T(x, y) = T(x)$, $Y = 1 - T$, et vérifie:

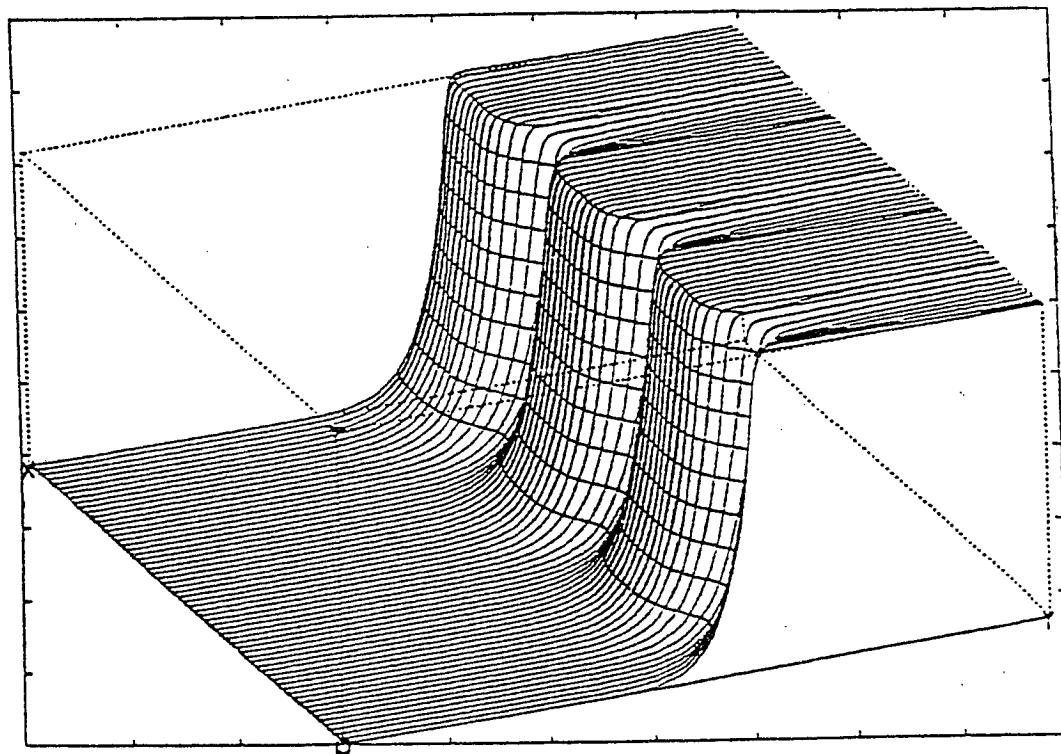
$$\begin{cases} -T'' + cT' = f(T)(1 - T) , \\ T(-\infty) = 0 , \quad T(0) = \theta , \quad T(+\infty) = 1 . \end{cases} \quad (6.4)$$

En effet, le théorème 5.7 donne l'unicité d'une solution de (6.3) quand $Le = 1$, et nous avons montré dans la section 4.2 l'existence d'une solution de (6.4), qui vérifie aussi (6.3).

Lorsque $Le = 1$, le système (6.3) a donc comme seule solution la solution monodimensionnelle donnée par (6.4). Les arguments formels des physiciens indiquent que cette propriété n'est plus assurée lorsque $Le < 1$. En effet, il existe toujours (au moins) une solution monodimensionnelle lorsque $Le < 1$, d'après la section 4.1. Mais il peut se produire (pour les grandes valeurs de l'énergie d'activation) que cette solution plane soit instable vis à vis de perturbations multidimensionnelles, et qu'il existe une autre solution stationnaire stable, et réellement multidimensionnelle (nous renvoyons le lecteur intéressé par l'étude de ce phénomène de bifurcation et d'instabilité à Clavin [16], Larroturou [34], Sivashinsky [44]). Le système (6.3) a alors au moins deux solutions différentes.

Cette perte d'unicité conjecturée sur la base des analyses asymptotiques des physiciens, peut être "vérifiée" numériquement. Lorsque $Le < 1$, on peut à la fois calculer la solution plane instable par un calcul monodimensionnel (voir Larroturou [35], Peters-Warnatz [42]), et la solution stable plissée par un calcul multidimensionnel (voir Benkhaldoun-Larroturou [5], Guillard et al [24]). On observe d'ailleurs sur cette solution plissée que les inégalités $T \leq 1$ et $T_x > 0$ ne sont pas satisfaites (voir figure 2).

Figure 2: Front de flamme plissé dans un tube bidimensionnel (de [24]).



L'étude rigoureuse de tous les points précédents qui sont des problèmes ouverts semble particulièrement intéressante sur le plan mathématique et utile pour la compréhension du modèle thermo-diffusif (6.1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON & L. NIRENBERG, "Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces", Comm. Pure Appl. Math., **16**, (2), pp. 121-239, (1963).
- [2] D. G. ARONSON & H. F. WEINBERGER, "Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation", Partial differential equations and related topics, Lect. Notes in Math., **446**, pp. 5-49, Springer Verlag, New York, (1975).
- [3] G. I. BARENBLATT, Ya. B. ZELDOVICH & A. G. ISTRATOV, Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., **2**, p. 21, (1962).
- [4] F. BENKHALDOUN, A. DERVIEUX, G. FERNANDEZ, H. GUILLARD & B. LARROUTUROU, "Some finite-element investigations of stiff combustion problems:

mesh adaption and implicit time-stepping", Mathematical modelling in combustion and related topics, Brauner & Schmidt-Lainé édés., NATO ASI Series E, Nijhoff, Doordrecht, à paraître.

[5] F. BENKHALDOUN & B. LARROUTUROU, "A finite-element adaptive investigation of curved stable and unstable flame fronts", à paraître.

[6] H. BERESTYCKI, L. CAFFARELLI & L. NIRENBERG, *en préparation*.

[7] H. BERESTYCKI & B. LARROUTUROU, "A semilinear elliptic equation in a strip arising in a two-dimensional flame propagation model", à paraître (prépublication Univ. Paris-Nord 73, (1987)).

[8] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU & P. L. LIONS, *en préparation*.

[9] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU & L. NIRENBERG, "A nonlinear elliptic problem describing the propagation of a curved premixed flame", Mathematical modelling in combustion and related topics, Brauner & Schmidt-Lainé édés., NATO ASI Series E, Nijhoff, Doordrecht, à paraître.

[10] H. BERESTYCKI, B. NICOLAENKO & B. SCHEURER, "Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits", SIAM J. Math. Anal., **16**, (6), pp. 1207-1242, (1985).

[11] H. BERESTYCKI & L. NIRENBERG, "Some qualitative properties of positive solutions to semilinear elliptic equations in cylindrical domains", *en préparation*.

[12] H. BERESTYCKI & L. NIRENBERG, "Uniqueness and singular limit of the solution of a two-dimensional elliptic model for flame propagation", *en préparation*.

[13] C. M. BRAUNER & C. SCHMIDT-LAINE, "Existence of a solution to a certain plane premixed flame problem with two-step kinetics", SIAM J. Math. Anal., **18**, (5), pp. 1406-1415, (1987).

[14] H. BREZIS, "Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert", Math. Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[15] J. D. BUCKMASTER & G. S. S. LUDFORD, "Theory of laminar flames", Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1982).

[16] P. CLAVIN, "Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows", Prog. Energ. Comb. Sci., **11**, p. 1, (1985).

- [17] P. CLAVIN & A. LIÑAN, "Theory of gaseous combustion", Non equilibrium cooperative phenomena in physics and related fields, Velarde éd., NATO ASI Series, Physics B, **116**, Plenum, (1983).
- [18] R. COURANT & K. O. FRIEDRICHS, "Supersonic flow and shock waves", Appl. Math. Sciences, **21**, Springer Verlag, New-York, (1948).
- [19] P. EMBID, "Well-posedness of the nonlinear equations for zero Mach number combustion", Thèse de Ph. D., Univ. Californie, Berkeley, (1984).
- [20] P. C. FIFE, "Propagating fronts in reactive media", Nonlinear problems: Present and Future, Bishop Campbell & Nicolaenko éds., Math. Studies, **61**, pp. 267-285, North-Holland, Amsterdam, (1982).
- [21] P. C. FIFE, "Mathematical aspects of reacting and diffusing systems", Lect. Notes in Biomath., **28**, Springer Verlag, New York, (1979).
- [22] B. GIDAS, W. M. NI & L. NIRENBERG, "Symmetry and related properties via the maximum principle", Comm. Math. Phys., **68**, pp. 209-243, (1979).
- [23] V. GIOVANGIGLI, "Mathematical analysis of non adiabatic planar laminar flames", *à paraître*.
- [24] H. GUILLARD, B. LARROUTUROU & N. MAMAN, "Etude numérique des instabilités cellulaires d'un front de flamme par une méthode pseudo-spectrale", Rapport INRIA 721, (1987).
- [25] S. HEINZE, "Traveling waves in combustion processes with complex chemical networks", Univ. Heidelberg, *Preprint* 355, (1986).
- [26] J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS & R. B. BIRD, "Molecular theory of gases and liquids", Wiley, (1954).
- [27] W. E. JOHNSON, "On a first-order boundary value problem for laminar flame theory", Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, pp. 46-54, (1963).
- [28] W. E. JOHNSON & W. NACHBAR, "Laminar flame theory and the steady linear burning of a monopropellant", Arch. Rat. Mech. Anal., **12**, pp. 58-91, (1963).
- [29] Ja. I. KANEL', "Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory", Mat. Sbornik, **59**, pp. 245-288, (1962).
- [30] Ja. I. KANEL', "On steady state solutions to systems of equations arising in

combustion theory", Dokl. Akad. Nauk USSR, **149**, (2), pp. 367-369, (1963).

[31] A. N. KOLMOGOROV, I. G. PETROVSKII & N. S. PISKUNOV, "A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter and its application to a biological problem", Bjul. Moskowskogo Gos. Univ., **17**, pp. 1-26, (1937).

[32] B. LARROUTUROU, "Adaptive numerical methods for unsteady flame propagation", Combustion and chemical reactors, Ludford éd., Lect. in Appl. Math., **24**, (2), pp. 415-435, AMS, Providence, (1986).

[33] B. LARROUTUROU, "The equations of one-dimensional unsteady flame propagation: existence and uniqueness", SIAM J. Math. Anal., **1**, (1988).

[34] B. LARROUTUROU, "Modèles mathématiques de la combustion en phase gazeuse", Cours de troisième cycle, à paraître.

[35] B. LARROUTUROU, "A conservative adaptive method for unsteady flame propagation", à paraître.

[36] A. MAJDA, "Equations for low Mach number combustion", Center for Pure and Appl. Math., Rapport 112, Univ. Californie, Berkeley, (1982).

[37] M. MARION, "Etude mathématique d'un modèle de flamme laminaire sans température d'ignition: I - Cas scalaire", Ann. Fac. Sci. Toulouse, **6**, pp. 215-255, (1984).

[38] M. MARION, "Qualitative properties of a nonlinear system for laminar flames without ignition temperature", Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, **9**, (11), pp. 1269-1292, (1985).

[39] E. S. ORAN & J. P. BORIS, "Detailed modelling of combustion systems", Prog. Energ. Comb. Sci., **7**, pp. 1-72, (1981).

[40] A. PAZY, "Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert spaces", Arch. Rat. Mech. Anal., **24**, (3), pp. 193-218, (1967).

[41] A. PAZY, "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations", Springer Verlag, New-York, (1983).

[42] N. PETERS & J. WARNATZ éd., "Numerical methods in laminar flame propagation", Notes in Num. Fluid. Mech., **6**, Vieweg, Braunschweig, (1982).

[43] G. I. SIVASHINSKY, "Instabilities, pattern formation and turbulence in

flames", Ann. Rev. Fluid Mech., **15**, pp. 179-199, (1983).

[44] G. I. SIVASHINSKY, "Instabilities, pattern formation and turbulence in flames", dans "Modélisation des phénomènes de combustion", Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, Paris, (1985).

[45] J. SMOLLER, "Shock waves and reaction-diffusion equations", Springer-Verlag, New-York, (1983).

[46] R. TEMAM, "Navier-Stokes equations", Studies in Math. and its Appl., North-Holland, New-York, (1979).

[47] D. TERMAN, "Traveling wave solutions arising from a combustion model", *preprint*.

[48] W. G. VINCENTI & C. H. KRUGER, "Introduction to physical gas dynamics", Wiley, (1965).

[49] F. A. WILLIAMS, "Combustion theory", second edition, Benjamin Cummings, Menlo Park, (1985).

[50] Ya. B. ZELDOVICH, "On the theory of flame propagation", J. Chem. Phys., **22**, pp. 27-48, (1948).

[51] Ya. B. ZELDOVICH, G. I. BARENBLATT, V. B. LIBROVICH & G. M. MAHVILADZE, "Mathematical theory of combustion and detonation", Nauka, Moscou, (1980).

[52] Ya. B. ZELDOVICH & D. A. FRANK-KAMENETSKII, Acta Phys. Chim., **2**, p. 348, (1938).

